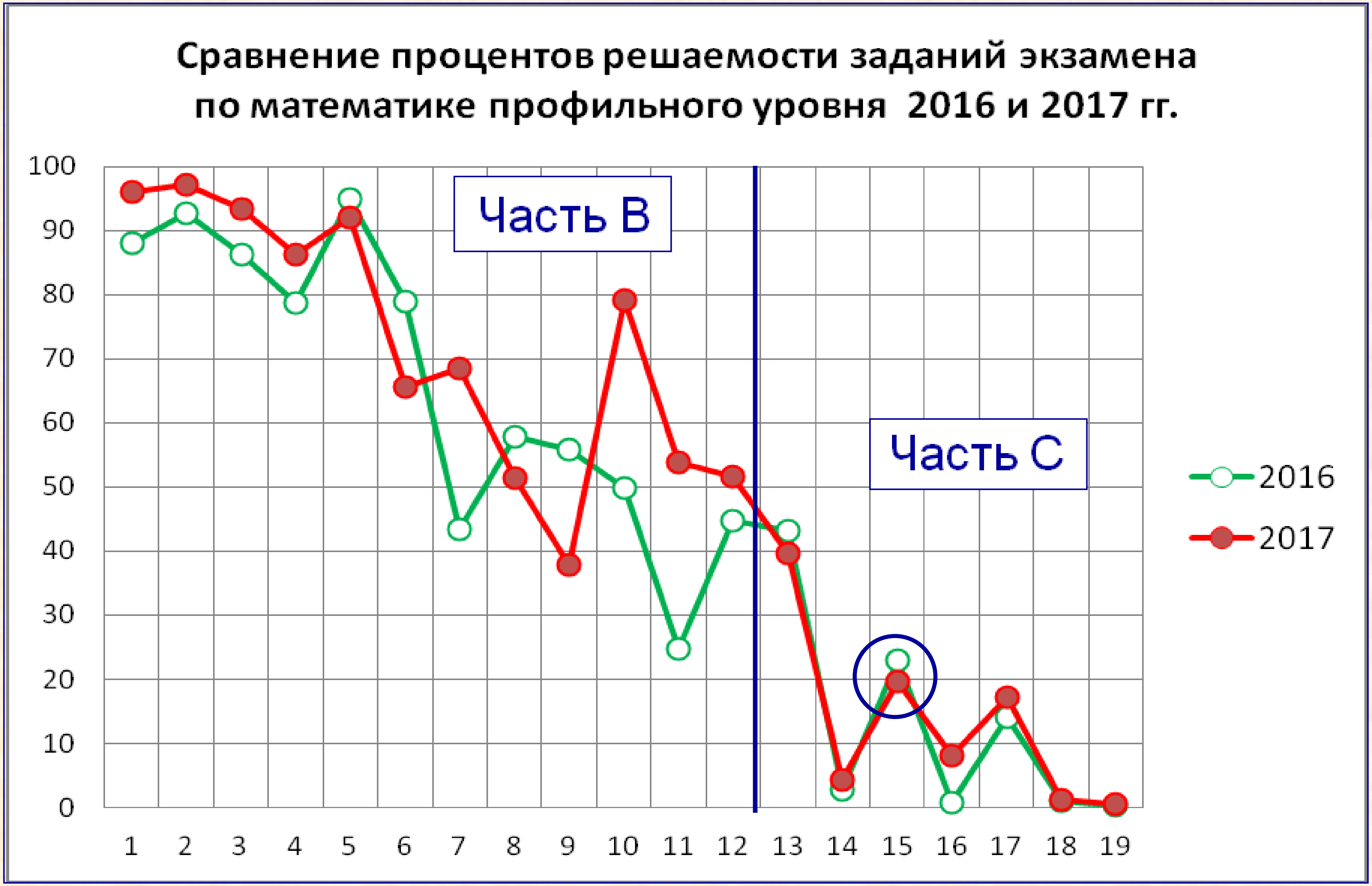
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«Московский институт электронной техники»
Зеленоград 30 ноября 2017

Рекомендации по подготовке к выполнению задания №15 (неравенства) ЕГЭ профильного уровня

Прокофьев Александр Александрович,

Зав.каф. «Высшей математики – 1», НИУ МИЭТ,
учитель математики ГБОУ г. Москвы «Школа №1298»

Сравнение процентов решаемости заданий в ЕГЭ 2016 и 2017 гг.



Примеры заданий С3 (№15 с 2015 г.) в ЕГЭ 2010-2013 гг.

ЕГЭ 2010. Решите неравенство: $\dfrac{\log_{7^{x+5}} 49}{\log_{7^{x+5}}(-49x)} \le \dfrac{1}{\log_7 \log_{\frac{1}{7}} 7^x}$.

ЕГЭ 2011. Решите неравенство: $9\log_7\left(x^2+x-2\right) \le 10+\log_7\dfrac{(x-1)^9}{x+2}$.

ЕГЭ 2012. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \dfrac{160-4^x}{32-2^x} \ge 5, \\ \log_{0,25x^2}\left(\dfrac{6-x}{4}\right) \le 1. \end{cases}$

ЕГЭ 2013. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \log_{4-x}\dfrac{x+6}{(x-4)^6} \ge -6, \\ x^3+9x^2+\dfrac{40x^2+2x-10}{x-5} \le 2. \end{cases}$

Примеры заданий С3 (№15 с 2015 г.) в ЕГЭ 2014-2017 гг.

ЕГЭ 2014. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \log_{7-x}(x+2) \le \log_{7-x}(3-x), \\ 32 \cdot 9^x \le 60 \cdot 3^x - 7. \end{cases}$

ЕГЭ 2015

Решите неравенство $\dfrac{3}{\left(2^{2-x^2}-1\right)^2} - \dfrac{4}{2^{2-x^2}-1} + 1 \ge 0$.

Решите неравенство $\dfrac{31-5\cdot 2^x}{4^x-24\cdot 2^x+128} \ge 0{,}25$.

ЕГЭ 2016

Решите неравенство $2\log_{(x^2-6x+10)^2}\left(5x^2+3\right) \le \log_{x^2-6x+10}\left(4x^2+7x+3\right)$.

Решите неравенство $\dfrac{27^{x+\frac{1}{3}}-10\cdot 9^x+10\cdot 3^x-5}{9^{x+\frac{1}{2}}-10\cdot 3^x+3} \le 3^x + \dfrac{1}{3^x-2} + \dfrac{1}{3^{x+1}-1}$.

ЕГЭ 2017

Решите неравенство $\dfrac{\log_2\left(4x^2\right)+35}{\log_2^2 x-36} \ge -1$.

Решите неравенство $\dfrac{\log_2\left(2x^2-17x+35\right)-1}{\log_7(x+6)} \le 0$.

Пример решения задания 15
из демоверсии ЕГЭ 2018 (профильный уровень)

1

Решите неравенство $\dfrac{9^x-2\cdot 3^{x+1}+4}{3^x-5}+\dfrac{2\cdot 3^{x+1}-51}{3^x-9}\le 3^x+5$.

Решение. Пусть $t=3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t^2-6t+4}{t-5}+\frac{6t-51}{t-9}\le t+5;\quad \frac{(t-1)(t-5)}{t-5}-\frac{1}{t-5}+\frac{6(t-9)}{t-9}+\frac{3}{t-9}\le t+5;$$

$$-\frac{1}{t-5}+\frac{3}{t-9}\le 0;\quad \frac{t-3}{(t-5)(t-9)}\le 0,$$

откуда $t\le 3$; $5<t<9$.

Процент решаемости 22,89%

При $t\le 3$ получим: $3^x\le 3$, откуда $x\le 1$.

При $5<t<9$ получим: $5<3^x<9$, откуда $\log_3 5<x<2$.

Решение исходного неравенства: $x\le 1$; $\log_3 5<x<2$.

Ответ: $(-\infty;1]$; $(\log_3 5;2)$.

Запись ответа в работе участника экзамена может отличаться от приведенной в критериях (содержать знаки объединения или нет). Важно, чтобы в ответе были правильно указаны все промежутки и изолированные точки.

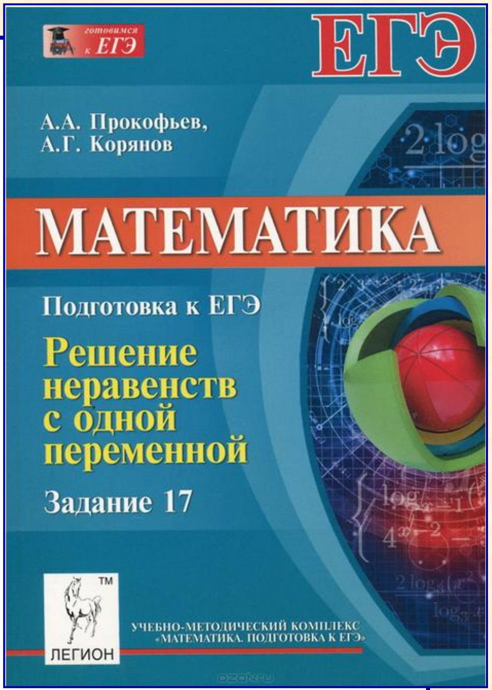
Критерии проверки задания 15

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки x_0 (обе части неравенства при этом значении имеют смысл) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Создано разработчиками ЕГЭ

Тест на эрудицию. Вопрос: что означает последовательность чисел 14 – 20 – 36 – 50?

Пособие Прокофьева А.А. и Корянова А.Г. по заданию 15 издательства Легион



Оглавление

Пособие Прокофьева А.А. и Корянова А.Г. на сайте http://alexlarin.net/

МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2014

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

(типовые задания С3)

Прокофьев А.А.

Корянов А.Г.

Прокофьев А.А. – доктор педагогических наук, заведующий кафедрой высшей математики №1 НИУ МИЭТ, учитель математики ГОУ лицей №1557 г. Зеленограда; e-mail: aaprokof@yandex.ru

Корянов А.Г. – методист по математике Брянского городского информационно-методического Центра (БГИМЦ); e-mail: akoryanov@mail.ru

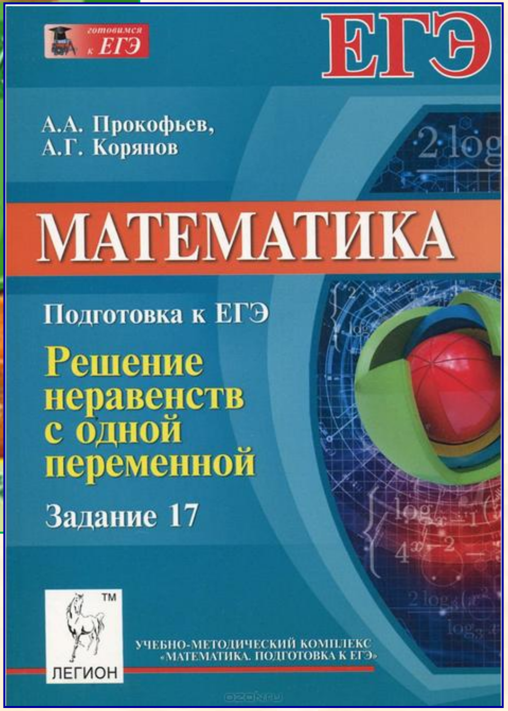
МОСКВА & БРЯНСК

2013

Полезные материалы

C1 C2 C3 C4 C5 C6

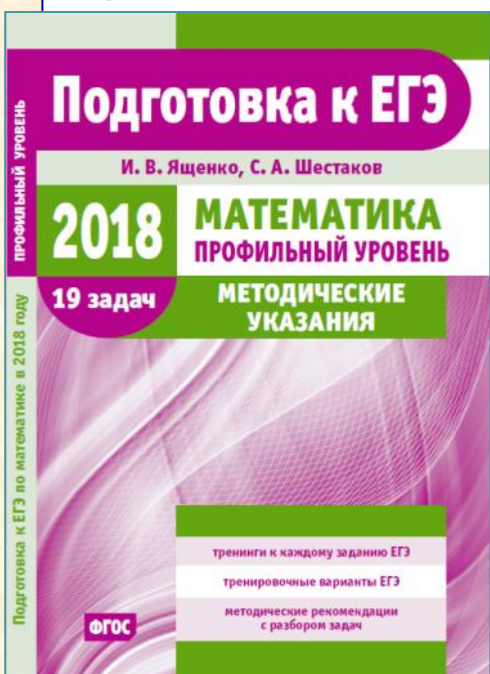
Издательство Легион



Что можно ожидать в качестве задания 15 на экзамене?

Задание 15

Тип задания по кодификатору требований	Неравенство или система неравенств.
Характеристика задания	Неравенство или система неравенств, содержащие степени, дроби, корни, логарифмы (в том числе с переменным основанием).



О сколько нам открытий чудных
Готовят …

Нюансы начальной подготовки к овладению методами решения задания 15

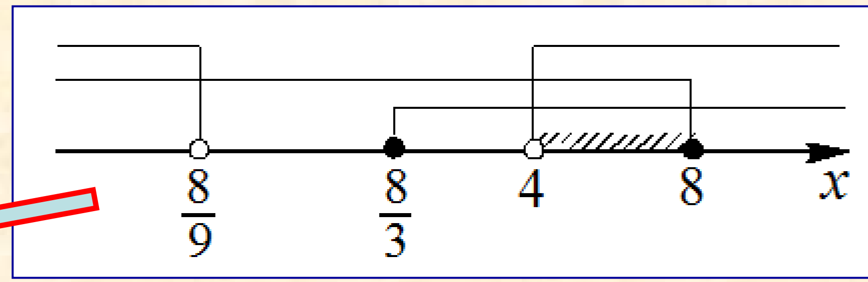
С чего следует начинать?

1. Научить решению простейших рациональных неравенств.
2. Полезно решать «обратные» задачи: составлять неравенства по ответу, заданному в виде системы неравенств или картинки.

$$\begin{cases} x \ge \dfrac{8}{3}, \\ x \le 8, \\ (9x-8)(x-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x \le 8.$$

$$2\sqrt{8-x} < 3x-8$$

На рис. представлена графическая интерпретация получения решения данной системы неравенств.



3. Обучение необходимо начинать со знакомства с основными методами решений неравенств, с заданий, направленных на отработку схем и методов решений, в которых идейная часть первична, а вычислительная часть достаточно проста.

Нюансы начальной подготовки к овладению методами решения задания 15

Надо уметь без ошибок решать простые неравенства, часто возникающие в процессе решения более сложных.

Решить неравенство:

$$а)\ 1 < x \le 5; \quad б)\ 0 \le 0; \quad в)\ 2^x \ge 0; \quad г)\ \sqrt{x} > 1; \quad д)\ \frac{x}{x} \ne 2.$$

Для того чтобы избежать недоразумений, достаточно лишь ясно понимать, что нестрогое неравенство справедливо как в случае соответствующего строгого неравенства, так и в случае равенства, но никак не в случае одновременного их выполнения, а также не забывать отбрасывать те значения неизвестной, которые не входят в ОДЗ.

Ответ:

$$а)\ (1;5]; \quad б)\ (-\infty;+\infty); \quad в)\ (-\infty;+\infty); \quad г)\ (1;+\infty); \quad д)\ (-\infty;0)\bigcup(0;+\infty).$$

Решите неравенство $\dfrac{x^3-7x^2+4x+12}{x^2-7x+12} \ge x+1.$

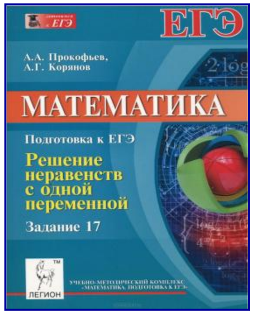
Тест на эрудицию.
Какая самая распространенная ошибка?

Нюансы начальной подготовки к овладению методами решения задания 15

При решении различных неравенств и их систем на этапе получения ответа, в частности нанесения их решений на одну числовую прямую, приходится сравнивать числовые значения, соответствующие концам промежутков, из которых состоят соответствующие множества решений, или выбирать из нескольких корней наибольший (наименьший).

Нужно знакомить учащихся с методами сравнения числовых выражений:

- ➢ сравнения с нулем разности выражений;
- ➢ сравнения с единицей отношения выражений;
- ➢ разделения выражений;
- ➢ использования свойств функций и графиков;
- ➢ классических неравенств и т.д.



Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников. Лекция 3. Решение неравенств алгебраическими методами. // «Математика». – М.: «Первое сентября». – 2011. – №16. − С. 50-61.

Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Системы неравенств с одной переменной в экзаменационных заданиях. // «Математика в школе», − М.: «Школьная пресса», – 2013. – № 2. − С. 15-27.

Основные методы решений неравенств

При решении заданий С3 в диагностических, тренировочных, репетиционных работах и в итоговых вариантах ЕГЭ для решения неравенств в основном было достаточно использования стандартных методов. К таковым методам можно отнести:

- метод равносильных переходов;
- метод замены;
- метод интервалов и обобщенный метод интервалов.
- решение неравенства на промежутках;

Кроме того, в ряде репетиционных работ для решения неравенств использовались нестандартные методы:

- метод рационализации;
- метод оценки, в частности, использование классических неравенств.

Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Материалы курса «Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников» лекции 1-4. − М.: Педагогический университет «Первое сентября». – 2012. – 104 с.

Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Материалы курса «Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников» лекции 1-4. − М.: Педагогический университет «Первое сентября». – 2014. – 120 с.

Неравенства, содержащие выражения с модулями

Стандартные схемы для решения неравенств с модулями, опирающиеся на определение модуля, его геометрический смысл и свойства.

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x), \end{cases}$$

$$|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x). \end{cases}$$

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x), \end{array} \right.$$

$$|f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x). \end{array} \right.$$

$$|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x) \Leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) > 0,$$

$$|f(x)| \ge |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \ge g^2(x) \Leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) \ge 0.$$

Неравенства, содержащие иррациональные выражения

Стандартные схемы для решения иррациональных неравенств, в которых используется возведение в четную натуральную степень обеих частей неравенства.

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^{2n}(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g^{2n}(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^{2n}(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq g^{2n}(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Неравенства, содержащие показательные выражения

Стандартные схемы для решения показательных неравенств, в которых используют логарифмирование обеих частей неравенства.

$$(\varphi(x))^{f(x)} > (\varphi(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x), \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$(\varphi(x))^{f(x)} \geq (\varphi(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq f(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1, \end{cases} \\ \quad \varphi(x) = 1. \end{array}\right.$$

Частный случай:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x), \\ a > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x), \\ 0 < a < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Неравенства, содержащие логарифмические выражения

Стандартные схемы для решения логарифмических неравенств, в которых используют потенцирование обеих частей неравенства.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\log_{\varphi(x)} f(x) \geq \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Частный случай:

$$\log_{a} f(x) > \log_{a} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x) > 0, \\ a > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x) > 0, \\ 0 < a < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Расщепление неравенств

Если левая часть неравенства представляет собой произведение или частное двух выражений, а правая часть равна нулю, то схема решения неравенства опирается на правило знаков при умножении (делении) положительных или отрицательных чисел.

$$f(x)\cdot g(x)\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)\geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\leq 0, \\ g(x)\leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$f(x)\cdot g(x)\leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)\leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\leq 0, \\ g(x)\geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)> 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\leq 0, \\ g(x)< 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)< 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\leq 0, \\ g(x)> 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример на использование схемы расщепления неравенства

2

Решить неравенство $\dfrac{2^{2x+1}-96\cdot 0,5^{2x+3}+2}{x+1}\le 0$.

$$\frac{2^{2x+1}-96\cdot\dfrac{1}{2^{2x+1}}\cdot\dfrac{1}{4}+2}{x+1}\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2^{2x+1}-\dfrac{24}{2^{2x+1}}+2}{x+1}\le 0.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\text{(A)}\ \begin{cases}2^{2x+1}-24\cdot\dfrac{1}{2^{2x+1}}+2\le 0,\\ x+1>0\end{cases} \quad \text{и} \quad \text{(B)}\ \begin{cases}2^{2x+1}-24\cdot\dfrac{1}{2^{2x+1}}+2\ge 0,\\ x+1<0.\end{cases}$$

(A). Пусть $t=2^{2x+1}$, $t>0$. Тогда

$$t-24\cdot\frac{1}{t}+2\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{t^2+2t-24}{t}\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(t+6)(t-4)}{t}\le 0.$$

Поскольку $t>0$, то $0<t\le 4$. Отсюда $2^{2x+1}\le 4 \quad\Leftrightarrow\quad 2x+1\le 2 \quad\Leftrightarrow\quad x\le 0,5$.

Для (A) получаем $\begin{cases}x\le 0,5,\\ x>-1\end{cases}\Leftrightarrow -1<x\le 0,5$.

(B). Из первого неравенство системы $\dfrac{(t+6)(t-4)}{t}\ge 0$ при $t>0$ получаем $t\ge 4$, т.е. $x\ge 0,5$. Для (B) получаем $\begin{cases}x\ge 0,5,\\ x<-1\end{cases}$. Нет решений.

Ответ. $-1<x\le 0,5$.

Пример оформления решения задания 15 с использованием равносильных преобразований

(ЕГЭ-2011). *Решить неравенство* $11\log_9(x^2-12x+27)\le 12+\log_9\dfrac{(x-9)^{11}}{x-3}$.

3

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-12x+27>0, \\ \dfrac{(x-9)^{11}}{x-3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-9)>0, \\ \dfrac{(x-9)^{11}}{x-3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<3, \\ x>9. \end{array}\right.$

Для $x\in(-\infty;3)\cup(9;+\infty)$ получаем

$$11\log_9(x^2-12x+27)+\log_9\frac{x-3}{(x-9)^{11}}=\log_9\frac{(x-3)^{11}(x-9)^{11}(x-3)}{(x-9)^{11}}=\log_9(x-3)^{12}.$$

Исходное неравенство примет вид $\log_9(x-3)^{12}\le 12$.

Так как $(x-3)^{12}\ge 0$, то при $x\ne 3$ имеем:

$$\log_9(x-3)^{12}\le 12 \Leftrightarrow (x-3)^{12}\le 9^{12} \Leftrightarrow (x-3)^2\le 9^2 \Leftrightarrow (x-12)(x+6)\le 0.$$

Откуда значения $x\in[-6;3)\cup(3;12]$. Учитывая ОДЗ исходного неравенства, получим в ответ.

Ответ: $[-6;3)\cup(9;12]$.

Правильное использование формул

Наибольшее число ошибок при решении логарифмических неравенств возникает в результате неправильного использования формул:

$$\log_a\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\log_a f(x)+\log_a g(x)\ ,$$

$$\log_a\frac{f(x)}{g(x)}=\log_a f(x)-\log_a g(x)\,.$$

Эти формулы справедливы, если $a>0, a\neq 1,\ f(x)>0$ и $g(x)>0$.

В общем случае переход слева направо может привести к потере решений.

Для выражений $\log_a\left(f(x)\cdot g(x)\right)$ или $\log_a\dfrac{f(x)}{g(x)}$ равносильный переход выглядит так: $\Rightarrow$

$$\log_a\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\log_a|f(x)|+\log_a|g(x)|,$$

На ОДЗ

$$\log_a\frac{f(x)}{g(x)}=\log_a|f(x)|-\log_a|g(x)|\,.$$

Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Методы решения логарифмических неравенств (часть I). //«Математика в школе»,− М.: «Школьная пресса», 2012.– № 6.− С. 3-11.

Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Методы решения логарифмических неравенств (часть II).//«Математика в школе»,− М.: «Школьная пресса», 2012.– № 7.− С. 3-11.

Пример оформления решения задания 15 с использованием равносильных преобразований

(ЕГЭ-2011). *Решить неравенство* $11\log_9(x^2-12x+27)\le 12+\log_9\dfrac{(x-9)^{11}}{x-3}$.

3

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-12x+27>0, \\ \dfrac{(x-9)^{11}}{x-3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-9)>0, \\ \dfrac{(x-9)^{11}}{x-3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<3, \\ x>9. \end{array}\right.$

Для $x\in(-\infty;3)\cup(9;+\infty)$ исходное неравенство приводится к виду:

$$\log_9|(x-3)^{11}|+\log_9|(x-9)^{11}|\le 12+\log_9|(x-9)^{11}|-\log_9|x-3|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_9|(x-3)^{11}|+\log_9|x-3|\le 12\Leftrightarrow \log_9(x-3)^{12}\le 12\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^{12}\le 9^{12}\Leftrightarrow |x-3|\le 9\Leftrightarrow -6\le x\le 12.$$

Учитывая, что значения $x\in(-\infty;3)\cup(9;+\infty)$, получаем ответ.

Ответ: $[-6;3)\cup(9;12]$.

Пример оформления решения задания 15 с использованием равносильных преобразований

4

Решите неравенство $\dfrac{4\cdot 7^{2x}-\frac{15}{7}\cdot 7^{x+1}+11}{7^{x+1}-7^{2x+1}}\le \dfrac{9}{7^{x+1}}$.

Преобразуем неравенство: $\dfrac{4\cdot 7^{2x}-\frac{15}{7}\cdot 7^{x+1}+11}{7^{x+1}-7^{2x+1}}\le \dfrac{9}{7^{x+1}}$; $\dfrac{4\cdot 7^{2x}-15\cdot 7^{x}+11}{7^{x+1}(1-7^{x})}\le \dfrac{9}{7^{x+1}}$;

$\dfrac{(7^{x}-1)(4\cdot 7^{x}-11)}{7^{x+1}(1-7^{x})}-\dfrac{9}{7^{x+1}}\le 0$; $\dfrac{(7^{x}-1)(4\cdot 7^{x}-2)}{7^{x+1}(1-7^{x})}\le 0$; $\begin{cases}4\cdot 7^{x}-2\ge 0,\\ x\ne 0;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}-\log_7 2\le x<0;\\ x>0.\end{array}\right.$

Ответ: $[-\log_7 2;0)$; $(0;+\infty)$.

5

Решите неравенство $\log_6\left(64^{x}+36^{x}-65\cdot 8^{x}+64\right)\ge 2x$.

Преобразуем неравенство: $\log_6\left(64^{x}+36^{x}-65\cdot 8^{x}+64\right)\ge 2x$;

$\log_6\left(64^{x}+36^{x}-65\cdot 8^{x}+64\right)\ge \log_6 36^{x}$; $64^{x}-65\cdot 8^{x}+64\ge 0$; $\left(8^{x}-1\right)\left(8^{x}-64\right)\ge 0$.

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}8^{x}-1\le 0,\\ 8^{x}-64\le 0;\end{cases}\\ \begin{cases}8^{x}-1\ge 0,\\ 8^{x}-64\ge 0;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0,\\ x\le 2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ x\ge 2;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x\le 0,\\ x\ge 2.\end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;0]$; $[2;\infty)$.

Пример оформления решения задания 15 с использованием равносильных преобразований

6

Решите неравенство $2\log_{(x^2-6x+10)^2}(5x^2+3)\le\log_{x^2-6x+10}(4x^2+7x+3)$.

Преобразуем исходное неравенство:

$$\log_{(x-3)^2+1}(5x^2+3)\le\log_{(x-3)^2+1}(4x^2+7x+3);$$

ЕГЭ 2016

$$\begin{cases}x\ne3,\\5x^2+3\le4x^2+7x+3;\end{cases}\quad\begin{cases}x\ne3,\\x(x-7)\le0,\end{cases}$$

откуда $0\le x<3$ или $3<x\le7$.

Решение исходного неравенства:

$$0\le x<3;\ 3<x\le7.$$

Ответ: $[0;3);\ (3;7]$.

Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Логарифмические неравенства в заданиях С3 ЕГЭ (начало). // «Математика для школьников», − М.: «Школьная пресса», – 2012. – № 1. − С. 3–12.

Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Логарифмические неравенства в заданиях С3 ЕГЭ (окончание). // «Математика для школьников», − М.: «Школьная пресса», 2012. – № 2. − С. 3-10.

Метод замены

Если неравенство $F(x) \vee 0$ приводится к виду $f\left(g(x)\right) \vee 0$, то можно ввести новую переменную $g(x) = t,$ решить неравенство $f(t) \vee 0$ относительно переменной t и затем решить полученные неравенства с первоначальной переменной x.

7

Решить неравенство $\dfrac{x^2-5x-3}{x^2-5x+3} + \dfrac{x^2-5x+24}{x^2-5x} \le 0$.

Пусть $t = x^2 - 5x$. Тогда получаем

$$\frac{t-3}{t+3} + \frac{t+24}{t} \le 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2+24t+72}{t(t+3)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{\boxed{(t+6)^2}}{t(t+3)} \le 0.$$

Отсюда $t \in \{-6\} \cup (-3;\, 0)$.

Получаем $\left[\begin{array}{l} t=-6, \\ \begin{cases} t>-3, \\ t<0. \end{cases} \end{array}\right.$ Отсюда $\left[\begin{array}{l} x^2-5x=-6, \\ \begin{cases} x^2-5x>-3, \\ x^2-5x<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=3, \\ 0<x<\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}, \\ \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}<x<5. \end{array}\right.$

Ответ: $0<x<\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$, $\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}<x<5$, $\boxed{x=2,\ x=3.}$

Метод замены

8

Решите неравенство $\dfrac{\log_2(4x^2)+35}{\log_2^2 x-36} \geq -1.$

ЕГЭ 2017

Пусть $t=\log_2 x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{2t+37}{t^2-36} \geq -1;\ \frac{t^2+2t+1}{t^2-36} \geq 0;\ \frac{\boxed{(t+1)^2}}{(t-6)(t+6)} \geq 0,$$

откуда $t<-6$; $t=-1$; $t>6$.

При $t<-6$ получим: $\log_2 x<-6$, откуда $0<x<\dfrac{1}{64}$.

При $t=-1$ получим: $\log_2 x=-1$, откуда $x=\dfrac{1}{2}$.

При $t>6$ получим: $\log_2 x>6$, откуда $x>64$.

Решение исходного неравенства: $0<x<\dfrac{1}{64}$; $x=\dfrac{1}{2}$; $x>64$.

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{64}\right)$; $\boxed{\dfrac{1}{2}}$; $(64;+\infty)$.

Пример решения задания 15 (метод замены)

9

Решите неравенство $\dfrac{27^{x+\frac{1}{3}}-10\cdot 9^x+10\cdot 3^x-5}{9^{x+\frac{1}{2}}-10\cdot 3^x+3}\le 3^x+\dfrac{1}{3^x-2}+\dfrac{1}{3^{x+1}-1}$.

Пусть $t=3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{3t^3-10t^2+10t-5}{3t^2-10t+3}\le t+\frac{1}{t-2}+\frac{1}{3t-1};$$

$$\frac{t\left(3t^2-10t+3\right)}{3t^2-10t+3}+\frac{6t-2}{3t^2-10t+3}+\frac{t-3}{3t^2-10t+3}\le t+\frac{1}{t-2}+\frac{1}{3t-1};$$

$$\frac{2}{t-3}\le\frac{1}{t-2},\ \text{где } t\ne\frac{1}{3};\quad \frac{t-1}{(t-2)(t-3)}\le 0,\ \text{где } t\ne\frac{1}{3},$$

откуда $t<\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}<t\le 1$; $2<t<3$.

При $t<\frac{1}{3}$ получим: $3^x<\frac{1}{3}$, откуда $x<-1$.

При $\frac{1}{3}<t\le 1$ получим: $\frac{1}{3}<3^x\le 1$, откуда $-1<x\le 0$.

При $2<t<3$ получим: $2<3^x<3$, откуда $\log_3 2<x<1$.

ЕГЭ 2016

Ответ: $(-\infty;-1)$; $(-1;0]$; $(\log_3 2;1)$.

Пример решения задания 15 (метод замены)

10

Решите неравенство $\dfrac{3}{\left(2^{2-x^2}-1\right)^2}-\dfrac{4}{2^{2-x^2}-1}+1\geq 0$.

ЕГЭ 2015

Пусть $t=2^{2-x^2}-1$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t^2-4t+3}{t^2}\geq 0;\ \frac{(t-1)(t-3)}{t^2}\geq 0,$$

откуда $t<0;\ 0<t\leq 1;\ t\geq 3$.

При $t<0$ получим: $2^{2-x^2}-1<0;\ 2-x^2<0$, откуда $x<-\sqrt{2};\ x>\sqrt{2}$.

При $0<t\leq 1$ получим: $0<2^{2-x^2}-1\leq 1;\ 0<2-x^2\leq 1$, откуда $-\sqrt{2}<x\leq -1;\ 1\leq x<\sqrt{2}$.

При $t\geq 3$ получим: $2^{2-x^2}-1\geq 3;\ 2-x^2\geq 2$, откуда $x=0$.

Решение исходного неравенства:

$$x<-\sqrt{2};\ -\sqrt{2}<x\leq -1;\ x=0;\ 1\leq x<\sqrt{2};\ x>\sqrt{2}.$$

Ответ: $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right);\ \left(-\sqrt{2};-1\right];\ 0;\ \left[1;\sqrt{2}\right);\ \left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Пример решения задания 15 (метод замены)

ЕГЭ 2015

11

Решите неравенство $\log_2^2\left(8+2x-x^2\right)+9\log_{0,5}\left(8+2x-x^2\right)+18>0$.

Пусть $t=\log_2\left(8+2x-x^2\right)$, тогда неравенство примет вид:

$$t^2-9t+18>0;\ (t-3)(t-6)>0,$$

откуда $t<3$; $t>6$.

При $t<3$ получим: $\log_2\left(8+2x-x^2\right)<3$; $0<8+2x-x^2<8$; $0<x^2-2x<8$,

ОДЗ

откуда $-2<x<0$; $2<x<4$.

При $t>6$ получим: $\log_2\left(8+2x-x^2\right)>6$; $8+2x-x^2>64$; $x^2-2x+56<0$;

решений нет.

Решение исходного неравенства: $-2<x<0$; $2<x<4$.

Ответ:: $(-2;0)$; $(2;4)$.

Разбиение области допустимых значений неизвестной неравенства на подмножества

Разбиение ОДЗ неизвестной неравенства на промежутки позволяет упростить некоторые неравенства. Решение неравенства рассматривают отдельно на каждом промежутке.

12

Решите неравенство $\dfrac{\log_2\left(2x^2-17x+35\right)-1}{\log_7(x+6)} \le 0.$

ЕГЭ 2017

Знаменатель левой части неравенства определён при $-6<x<-5$ и $x>-5$.

При $-6<x<-5$ знаменатель левой части неравенства отрицателен и неравенство принимает вид:

$$\log_2\left(2x^2-17x+35\right)\ge 1;\ 2x^2-17x+35\ge 2;\ 2x^2-17x+33\ge 0,$$

откуда $x\le 3$; $x\ge\dfrac{11}{2}$. В этом случае решение неравенства: $-6<x<-5$.

При $x>-5$ знаменатель левой части неравенства положителен и неравенство принимает вид:

$$\log_2\left(2x^2-17x+35\right)\le 1;\ 0<2x^2-17x+35\le 2,$$

откуда $3\le x<\dfrac{7}{2}$; $5<x\le\dfrac{11}{2}$.

Ответ: $(-6;-5)$; $\left[3;\dfrac{7}{2}\right)$; $\left(5;\dfrac{11}{2}\right]$.

Решение неравенства на промежутках

13

Решите неравенство $\dfrac{\log_9(2-x)-\log_{15}(2-x)}{\log_{15}x-\log_{25}x} \le \log_{25}9$.

Левая часть неравенства определена при $2-x>0;\ x>0;\ x\ne 1$.

При $0<x<1$ получаем

$$\log_{15}x<\log_{25}x, \quad \log_9(2-x)>\log_{15}(2-x).$$

Значит, левая часть неравенства отрицательна и не превосходит $\log_{25}9$.

При $1<x<2$ получаем

$$\log_{15}x>\log_{25}x, \quad \log_9(2-x)<\log_{15}(2-x).$$

Значит, левая часть неравенства отрицательна и не превосходит $\log_{25}9$.

Таким образом, решение исходного неравенства $(0;1)$ и $(1;2)$.

Ответ: $(0;1);(1;2)$.

Решение неравенства на промежутках

ЕГЭ 2016

14

Решите неравенство $(5x-13)\cdot\log_{2x-5}(x^2-6x+10)\geq 0$.

Заметим, что $x^2-6x+10=(x-3)^2+1\geq 1$ при любых значениях x.

Значит, выражение $\log_{2x-5}(x^2-6x+10)$

положительно при $x>3$,

отрицательно при $\frac{5}{2}<x<3$ и

не определено при $x\leq\frac{5}{2}$ и $x=3$.

При $x>3$ выражение $5x-13$ положительно, а

при $\frac{5}{2}<x<3$ исходное неравенство равносильно неравенству $5x-13\leq 0$,

откуда $x\leq\frac{13}{5}$.

Таким образом, решение исходного неравенства: $\frac{5}{2}<x\leq\frac{13}{5}$; $x>3$.

Ответ: $\frac{5}{2}<x\leq\frac{13}{5}$; $x>3$.

Пример на использование обобщенного метода интервалов

2

Решить неравенство $\dfrac{2^{2x+1}-96\cdot 0,5^{2x+3}+2}{x+1}\le 0$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{2^{2x+1}-24\cdot\dfrac{1}{2^{2x+1}}+2}{x+1}$. Она не определена при $x=-1$ и непрерывна на $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

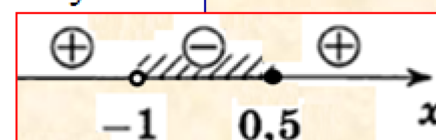
Найдем нули функции $f(x)$: $\begin{cases}2^{2x+1}-24\cdot\dfrac{1}{2^{2x+1}}+2=0,\\ x+1\ne 0\end{cases}$

Решим уравнение $2^{2x+1}-24\cdot\dfrac{1}{2^{2x+1}}+2=0$. Пусть $t=2^{2x+1}$, $t>0$. Тогда

$$t-24\cdot\frac{1}{t}+2=0 \Leftrightarrow \frac{t^2+2t-24}{t}=0 \Leftrightarrow \frac{(t+6)(t-4)}{t}=0.$$

Поскольку $t>0$, то $t=4$. Отсюда $2^{2x+1}=4 \Leftrightarrow 2x+1=2 \Leftrightarrow x=0,5$.

Используя «метод пробной точки», определим знаки f на промежутках $(-\infty;-1)$, $(-1;0,5)$ и $(0,5;\infty)$:



$$f(-2)=\frac{2^{-3}-\dfrac{24}{2^{-3}}+2}{-1}>0,\quad f(0)=\frac{2-\dfrac{24}{2}+2}{1}<0,\quad f(1)=\frac{2^3-\dfrac{24}{2^3}+2}{2}>0.$$

Ответ. $-1<x\le 0,5$.

Неравенства вида $\log_{h(x)} f(x) \le \log_{h(x)} g(x)$

Неравенство указанного вида равносильно совокупности систем неравенств

$$\log_{h(x)} f(x) \le \log_{h(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1, \\ 0 < f(x) \le g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ 0 < g(x) \le f(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример 15

$$\log_{x+7} x^2 \le \log_{x+7}(x+12) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x+7 < 1, \\ x^2 \ge x+12, \\ x+12 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+7 > 1, \\ x^2 \le x+12, \\ x^2 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -7 < x < -6, \\ (x-4)(x+3) \ge 0, \\ x > -12 \end{cases} \\ \begin{cases} x > -6, \\ (x-4)(x+3) \le 0, \\ x \ne 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -7 < x < -6, \\ -3 \le x < 0, \\ 0 < x \le 4. \end{array}\right.$$

Метод рационализации. За или против?

Скорее против! Возможно только для сильных учеников.

При решении логарифмических неравенств метод рационализации опирается на следующее утверждение:

Знак выражения $\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x)$ ***совпадает со знаком выражения*** $(h(x)-1)(f(x)-g(x))$***,*** ***где*** $h(x)>0,\ h(x)\neq 1,\ f(x)>0,\ g(x)>0.$

Схема

$$\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x) \vee 0 \underset{\text{на ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (h(x)-1)(f(x)-g(x)) \vee 0, \\ h(x)>0, \\ h(x)\neq 1, \\ f(x)>0, \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Неравенства вида $\log_{h(x)} f(x) \le \log_{h(x)} g(x)$

Решение методом рационализации.

Пример 15

$$\log_{x+7} x^2 \le \log_{x+7}(x+12) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)(x^2-x-12) \le 0, \\ x+7>0, \\ x+7 \ne 1, \\ x^2>0, \\ x+12>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)(x-4)(x+3) \le 0, \\ x>-7, \\ x \ne -6, \\ x \ne 0, \\ x>-12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -7<x<-6, \\ -3 \le x < 0, \\ 0<x \le 4. \end{array} \right.$$

ОДЗ

Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников. Лекция 4. Решение неравенств функционально графическим методом. // «Математика». – М.: «Первое сентября». – 2011. – №17. − С. 49-61.

Пример оформления решения задания 15 с использованием метода рационализации

16

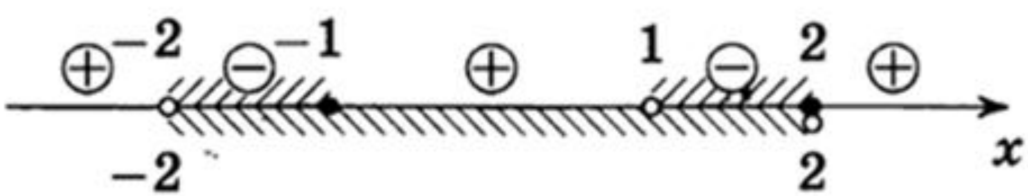
Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leqslant 0.$

Применим метод знакотождественных множителей, перейдя к основанию 10:

$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\lg(x+2)}{\lg(2-x)}\cdot\frac{\lg(3-x)}{\lg(x+3)}\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)(2-x)}{(1-x)(x+2)}\leqslant 0, \\ -2<x<2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}\leqslant 0, \\ -2<x<2, \end{cases}$$

Последняя система решается методом интервалов:



ОТВЕТ. $(-2;-1]\cup(1;2).$

Метод рационализации содержащим показательные или показательно-степенные выражения

При решении неравенств, содержащим показательные или показательно-степенные выражения, метод рационализации опирается на следующее утверждение:

Знаки выражений $h(x)^{f(x)}-h(x)^{g(x)}$ *и* $\big(h(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)$ *совпадают для всех значений* x *таких, что* $h(x)>0$.

Схема

$$h(x)^{f(x)}-h(x)^{g(x)}\vee 0 \underset{\text{на ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}(h(x)-1)(f(x)-g(x))\vee 0,\\ h(x)>0.\end{cases}$$

17

Решить неравенство $(x^2-1)^{2+x}>(x^2-1)^{5x-3}$.

Используя метод рационализации, получаем:

$$(x^2-1)^{2+x}-(x^2-1)^{5x-3}>0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x^2-1-1)(2+x-5x+3)>0,\\ x^2-1>0.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)(5-4x)>0,\\ (x-1)(x+1)>0.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-\sqrt{2},\\ 1,25<x<\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Метод рационализации содержащим показательные или показательно-степенные выражения

18 Решите неравенство $3\cdot 9^{x^2-1}-12\cdot 3^{x^2-2}+1\geqslant 0.$

$3\cdot 9^{x^2-1}-12\cdot 3^{x^2-2}+1\geqslant 0 \Leftrightarrow 3\cdot 9^{x^2-1}-4\cdot 3^{x^2-1}+1\geqslant 0.$

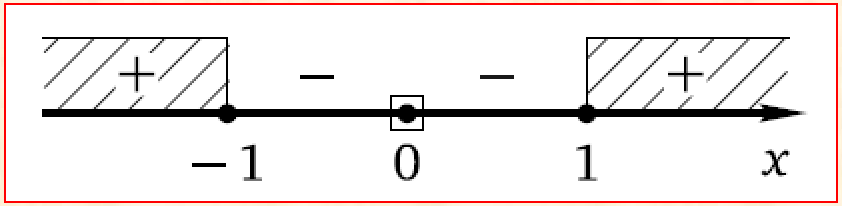
Пусть $t=3^{x^2-1}$, $t>0$. Неравенство примет вид $3t^2-4t+1\geqslant 0$, откуда $\left(t-\frac{1}{3}\right)(t-1)\geqslant 0.$

Сделаем обратную замену и применим метод рационализации

$$\left(3^{x^2-1}-\frac{1}{3}\right)(3^{x^2-1}-1)\geqslant 0 \Leftrightarrow (3^{x^2-1}-3^{-1})(3^{x^2-1}-3^{0})\geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1+1)(x^2-1-0)\geqslant 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x+1)\geqslant 0.$$

Ответ: $(-\infty;-1]\cup\{0\}\cup[1;+\infty).$



Учитывая, что $3^{x^2-1}\geqslant \frac{1}{3}$ можно было использовать переход к совокупности неравенств $\left(3^{x^2-1}-\frac{1}{3}\right)(3^{x^2-1}-1)\geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^{x^2-1}\leqslant \frac{1}{3},\\ 3^{x^2-1}\geqslant 1.\end{array}\right.$

Пример решения неравенства с использованием свойств функций (монотонность)

19 Решите неравенство $10^{4x-5}+\lg(4x-3)\leqslant 10^{2x+3}+\lg(2x+5)$.

Рассмотрим функцию $f(t)=10^t+\lg(t+2)$, возрастающую на всей области определения. В силу возрастания функции $y=f(t)$ неравенство $f(\alpha)\leqslant f(\beta)$ будет выполняться при допустимых α и β в том и только том случае, если $\alpha\leqslant\beta$. В нашем случае $\alpha=4x-5$, $\beta=2x+3$. Таким образом,

$$\begin{cases} 4x-5\leqslant 2x+3, \\ 4x-5>-2, \\ 2x+3>-2, \end{cases}$$

откуда $0{,}75<x\leqslant 4$.

Ответ: $(0{,}75;\,4]$.

Применение графических методов решения неравенств

Графическое метод имеет следующие преимущества:

а) построив графики функций, входящих в неравенство, можно определить, как влияет на решение их взаимное расположение;

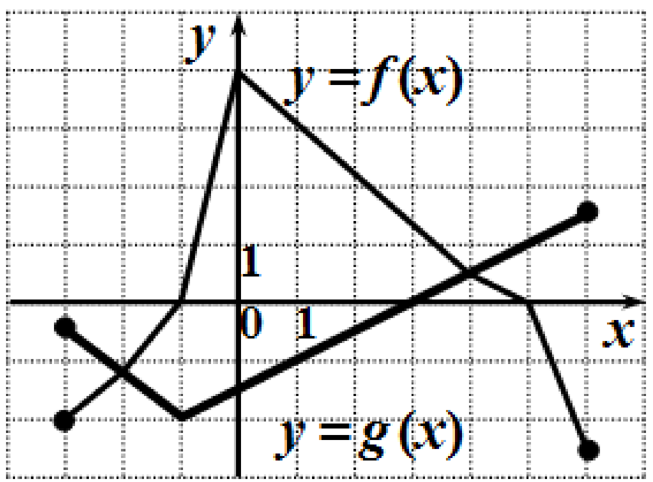
б) график иногда позволяет аналитически сформулировать необходимые и достаточные условия для решения задачи, т.е. их эффективно применяются для изображения результатов исследования там, где чисто аналитическая запись громоздка.

в) ряд утверждений позволяет на основании графической информации делать вполне строгие и обоснованные заключения о решениях неравенства.

20

На рис. изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке $[-3;6]$. Решите неравенство $f(x) > g(x)$.

Ответ: $(-2;\ 4)$.



21 **(МФТИ, 2009).** Решите неравенство $\log_{|x|}(\sqrt{x+5}+4) \geq 2\log_{x^2}(2x+8)$.

ОДЗ неравенства определяется условиями $x \neq 0$, $|x| \neq 1$, $x \geq -5$, $x > -4$, и является множеством $(-4;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

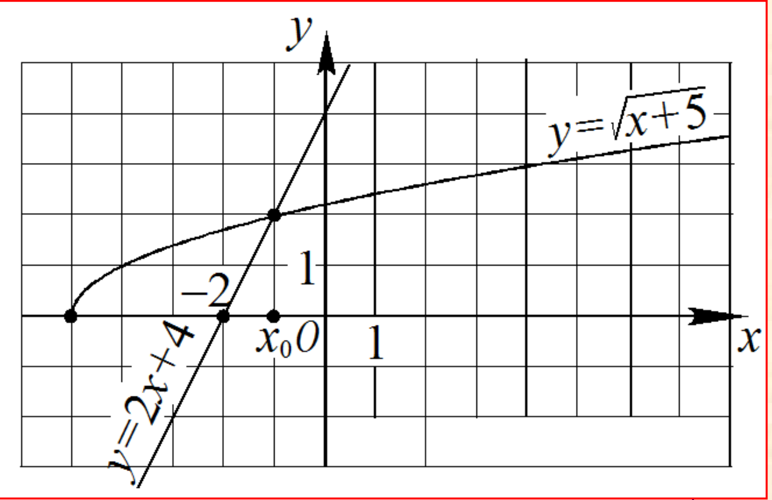
Рассмотрим два случая.

1. Пусть $|x|>1$. В этом случае исходное неравенство равносильно неравенству $\log_{|x|}(\sqrt{x+5}+4) \geq \log_{|x|}(2x+8) \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{x+5} \geq 2x+4}$ $(*)$.

Построим графики функций $y=\sqrt{x+5}$ и $y=2x+4$ (см. рис.).

Уравнения $\sqrt{x+5}=2x+4$ имеет корень -1. С учетом ОДЗ и условия $|x|>1$ получаем решение $(*)$: $-4<x<-1$.

2. Пусть $0<|x|<1$. Исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{x+5} \leq 2x+4$. Откуда (см. рис.) следует $x \geq -1$. С учетом области определения неравенства при условии $0<|x|<1$ находим множество решений неравенства, которое является объединением интервалов $(-1;0)$ и $(0;1)$.



Ответ: $-4<x<-1$, $-1<x<0$, $0<x<1$.

Метод решения неравенств с помощью оценки значений левой и правой частей неравенства

Полезно знать и уметь находить область значений функций на всей области определения и на отрезке. Полезно помнить:

1 $$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \geq \frac{4ac - b^2}{4a}, \quad a > 0;$$

или $f(x) = ax^2 + bx + c \geq f(x_0)$, где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $a > 0$;

2 $$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad E(f) = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty);$$

$$f(x) = ax + \frac{b}{x}, \ ab > 0, \quad E(f) = (-\infty; -2\sqrt{ab}] \cup [2\sqrt{ab}; +\infty);$$

3 $$f(x) = a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi), -\sqrt{a^2 + b^2} \leq f(x) \leq \sqrt{a^2 + b^2};$$

4 $$f(x) = \log_a(g^2(x) + b) \geq \log_a b, \quad a > 1, \quad b > 0;$$

5 $$f(x) = a^{g^2(x) + b} \geq a^b, \quad a > 1.$$

Метод оценки левой и правой частей неравенства

Иногда неравенство $f(x) \vee g(x)$, где символ $\vee$ означает один из знаков неравенств $\geq, >, \leq, <$, устроено так, что при всех допустимых значениях неизвестной x имеют место неравенства $f(x) \geq A$ и $g(x) \leq A$ при некотором A. В этом случае:

а) решение неравенства $f(x) \leq g(x)$ сводится к нахождению тех значений x, для которых одновременно $f(x) = A$ и $g(x) = A$;

б) неравенство $f(x) < g(x)$ не имеет решений;

в) решение неравенства $f(x) \geq g(x)$ сводится к нахождению тех решений неравенства $f(x) \geq A$, для которых определена функция $g(x)$;

г) неравенство $f(x) > g(x)$ верно для всех допустимых значений x.

22

Решить неравенство $\log_5 x \leq \sqrt{1 - x^4}$.

ОДЗ неравенства задается условиями: $\begin{cases} x > 0, \\ 1 - x^4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0 < x \leq 1.$

Для всех $x \in (0;1]$ имеем $\log_5 x \leq 0$, а $\sqrt{1 - x^4} \geq 0$. Следовательно, решением данного неравенства является промежуток $(0;1]$.

Подготовительные задания 15

1 Решите неравенство

$$(x-5)^5(x-7)^7(x-8)^8 \leqslant 0.$$

2 Решите неравенство

$$\frac{(2x-15)(4-5x)^4(x-8)^2}{x^2-64} \leqslant 0.$$

3 Решите неравенство

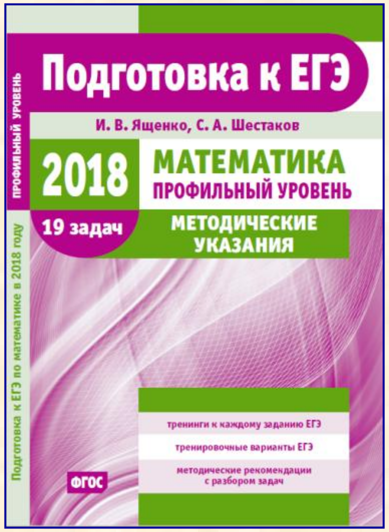
$$\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x+5} \geqslant \frac{2}{x+6}.$$

4 Решите неравенство

$$\frac{(2^x-0{,}25)(20^x-0{,}05)(x^2-1)}{x+2} \geqslant 0.$$

5 Решите неравенство

$$\frac{\log_5(3x^2+2x)}{\log_6(6x^2-5x)} \leqslant 0.$$



Подготовительные задания 15

6 Решите неравенство

$$\frac{45}{(x^2+6x)^2}+\frac{14}{x^2+6x}+1\geqslant 0.$$

7 Решите неравенство

$$4^{\frac{1}{x}-2}-4\cdot 2^{\frac{1}{x}-3}-8\geqslant 0.$$

8 Решите неравенство

$$\log_4^2(64-x^2)-5\log_4(64-x^2)+6\geqslant 0.$$

9 Решите неравенство

$$\log_{14x-5}(35x-2)\geqslant 1.$$

10 Решите неравенство

$$\log_{2-5x}(5x+2)\cdot\log_{5x+3}(3-5x)\leqslant 0.$$

Ответы к подготовительным заданиям 15

Задача 15. Подготовительные задания

1. $[5;\ 7] \cup \{8\}$. **2.** $(-\infty;\ -8) \cup \{0{,}8\} \cup [7{,}5;\ 8)$. **3.** $(-\infty;\ -6) \cup \left(-5;\ -\frac{25}{6}\right] \cup (5;\ +\infty)$. **4.** $\{-1\} \cup [1;\ +\infty)$. **5.** $\left[-1;\ -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{6};\ 1\right)$. **6.** $(-\infty;\ -6) \cup (-6;\ -5] \cup \{-3\} \cup [-1;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. **7.** $\left(0;\ \frac{1}{4}\right]$. **8.** $(-8;\ -4\sqrt{3}] \cup \{0\} \cup [4\sqrt{3};\ 8)$. **9.** $\left(\frac{3}{7};\ +\infty\right)$. **10.** $(-0{,}4;\ -0{,}2] \cup (0{,}2;\ 0{,}4)$.

Зачетные задания 15

1 Решите неравенство

$$x\,(x+3)^3\,(x+4)^4\,(x+5)^5 \leqslant 0.$$

2 Решите неравенство

$$\frac{(4^x-0{,}25)\,(5^x-0{,}04)\,(x^2-4)}{x+1} \geqslant 0.$$

3 Решите неравенство

$$\frac{(x+3)^2\,(|x-4|+5x-8)}{5x-3|x+2|+2} \leqslant 0.$$

4 Решите неравенство

$$\frac{(x-7)^2\,(|x-6|+|x+6|)\,(\log_6(x-5)-\log_6(x+5))}{\sqrt{x-4}-\sqrt{x+4}} \leqslant 0.$$

5 Решите неравенство

$$3^{x+1}+10^x < 10^{x-1}+4\cdot 3^x+3^{x+2}.$$

Зачетные задания 15

6 Решите неравенство

$$x \log_5 x + 2 > x + 2 \log_5 x.$$

7 Решите неравенство

$$\frac{16}{(3^{2-x^2}-1)^2} - \frac{10}{3^{2-x^2}-1} + 1 \geqslant 0.$$

8 Решите неравенство

$$\log_{12x^2-5x-2}(6x^2-11x+4) \leqslant 0.$$

9 Решите неравенство

$$\frac{45}{(\log_2^2 x + 6 \log_2 x)^2} + \frac{14}{\log_2^2 + 6 \log_2 x} + 1 \geqslant 0.$$

10 Решите неравенство

$$\frac{\log_{1-x}\bigl((3x+1)(1-2x+x^2)\bigr)}{\log_{3x+1}(1-x)} \leqslant -1.$$

Ответы к зачетным заданиям 15

Зачётные задания

1. $(-\infty; -5] \cup \{-4\} \cup [-3; 0]$. **2.** $\{-2\} \cup [2; +\infty)$. **3.** $\{-3\} \cup [1; 2)$. **4.** $\{7\}$. **5.** $(-\infty; 2)$. **6.** $(0; 2) \cup (5; +\infty)$. **7.** $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(-\sqrt{2}; -1\right] \cup \{0\} \cup$ $\cup \left[1; \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$. **8.** $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right]$. **9.** $\left(0; \frac{1}{64}\right) \cup \left(\frac{1}{64}; \frac{1}{32}\right] \cup$ $\cup \left\{\frac{1}{8}\right\} \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$. **10.** $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

Примеры на использование различных методов решения

Решите неравенство (из лекции для учителей от издательства «Бином»).

1. $\dfrac{2\log_2(x+4)+1}{\log_2(x+4)-1} \geq \dfrac{2\log_2(30-x)+1}{\log_2(30-x)-1}$ (*обобщенный метод интервалов*).

2. $\log_{5-x}(x^2-14x+49) \leq 2\log_{5-x}(8x-x^2-7)-2$ (*метод равносильных переходов*).

3. $(x+1)\log_3 6+\log_3\left(2^x-\dfrac{1}{6}\right) \leq x-1$ (*преобразования и замена*).

4. $x \geq \log_2\left(101\cdot 10^x-10^{2+2x}\right)-\log_5\left(101\cdot 2^x-5^{2+x}\cdot 2^{2+2x}\right)$ (*преобраз.*).

5. $\dfrac{9}{\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\cdot\log_{1,9}x} \geq \dfrac{(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\cdot\log_{1,9}x}$ (*три способа: рационализации, по схеме "дробь* $\Leftrightarrow$ *совокупности двух систем" – расщепления неравенства, обобщенный метод интервалов*).

6. $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(8x^2+24x-16)+\log_2(x^4+6x^3+9x^2)}{x^2+3x-10} \geq 0$ (*замена и схема*).

Примеры на использование различных методов решения

7. $$\frac{14^{1+\lg x}}{7\lg^2(100x)\lg(0{,}1x)} \le \frac{(4\cdot 2^{(1+\lg x)})^{1+\lg x}}{4\lg^2(100x)\lg(0{,}1x)}\ (\textit{замена и метод интерв.}).$$

8. $$\frac{\log^2_{2x-3}\dfrac{1}{3x-5}+\log_{2x-3}(9x^2-30x+25)+7}{2\cdot\log_{2x-3}(6x^2-19x+15)-1}\le 3\ (\textit{замена}).$$

9*. $$\log_{\frac{1}{2}}5+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{\frac{1}{2}x^2+2x+6}+1\right)\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2+2x+7\right)\le 0\ (\textit{оценка}).$$

10*. $$5^{\log x^2}\log_2 x+5^{\log 2^x}\log_x 2\le 10\ (\textit{использование неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим}).$$

11. $$3\log_{x-2}(8-x)+1\le\frac{1}{4}\log^2_{x-2}(x^2-10x+16)^2.$$

12. $$\frac{\lg(3x+2\sqrt{x}-1)}{\lg(5x+3\sqrt{x}-2)^5}\ge\frac{\log_{32}11}{\log_2 11}.$$

Задания для самостоятельного решения

1

Решите неравенство $(20-11x)\cdot\log_{5x-9}\left(x^2-4x+5\right)\le 0$.

2

Решите неравенство $\dfrac{3}{\left(2^{2-x^2}-1\right)^2}-\dfrac{4}{2^{2-x^2}-1}+1\ge 0$.

3

Решите неравенство $\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(2x^2+x-1\right)\ge\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(11x-6-3x^2\right)$.

4

Решите неравенство $\dfrac{x^3-13x^2+44x-30}{x^2-11x+30}\ge x-1$.

5

Решите неравенство $\log_{8x^2-23x+15}(2x-2)\le 0$.

6

Решите неравенство $3^{\log_2 x^2}+2\cdot|x|^{\log_2 9}\le 3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_{0,5}(2x+3)}$.

Задания для самостоятельного решения

7

Решите неравенство $2\log_{(x^2-4x+5)^2}\left(4x^2+1\right) \le \log_{x^2-4x+5}\left(3x^2+4x+1\right)$.

8

Решите неравенство $\dfrac{\log_3 x}{\log_3\left(\dfrac{x}{27}\right)} \ge \dfrac{4}{\log_3 x} + \dfrac{8}{\log_3^2 x - \log_3 x^3}$.

9

Решите неравенство $\dfrac{2}{\log_2 x} + \dfrac{5}{\log_2^2 x - \log_2 x^3} \le \dfrac{\log_2 x}{\log_2\left(\dfrac{x}{8}\right)}$.

10

Решите неравенство $\log_2\left(4^x + 81^x - 4\cdot 9^x + 3\right) \ge 2x$.

11

Решите неравенство $1 + \dfrac{7}{\log_6 x - 3} + \dfrac{10}{\log_6^2 x - \log_6\left(216x^6\right) + 12} \ge 0$.

12

Решите неравенство $\log_{|x|}\left(15x - 18 - 2x^2\right) \le 2$.

Задания для самостоятельного решения

13

Решите неравенство $\dfrac{2^x}{2^x-3}+\dfrac{2^x+1}{2^x-2}+\dfrac{5}{4^x-5\cdot 2^x+6}\le 0$.

14

Решите неравенство $\left(\log_2^2 x-2\log_2 x\right)^2+36\log_2 x+45<18\log_2^2 x$.

15

Решите неравенство $\log_{0,25x^2}\left(\dfrac{x+12}{4}\right)\le 1$.

16

Решите неравенство $\log_{\frac{3x-4}{x+1}}\left(2x^2-3x\right)\ge \log_{\frac{3x-4}{x+1}}\left(17x-20-3x^2\right)$.

17

Решите неравенство $\log_5^2\left(25-x^2\right)-3\log_5\left(25-x^2\right)+2\ge 0$.

18

Решите неравенство $1+\dfrac{7}{\log_6 x-3}+\dfrac{10}{\log_6^2 x-\log_6\left(216x^6\right)+12}\ge 0$.

19

Решите неравенство $2^{1+\log_3 x^2}+2\cdot|x|^{\log_3 4}\le 4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(3x+4)}$.

Ответы

1

Ответ: $\left(\frac{9}{5};\frac{20}{11}\right]\cup(2;+\infty)$.

Решите неравенство $(20-11x)\cdot\log_{5x-9}\left(x^2-4x+5\right)\le 0$.

2

Ответ:
$\left(-\infty;-\sqrt{2}\right);\left(-\sqrt{2};-1\right];$
$0;\left[1;\sqrt{2}\right);\left(\sqrt{2};+\infty\right)$

Решите неравенство $\dfrac{3}{\left(2^{2-x^2}-1\right)^2}-\dfrac{4}{2^{2-x^2}-1}+1\ge 0$.

3

Ответ: $1;\left(\frac{3}{2},3\right)$

Решите неравенство $\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(2x^2+x-1\right)\ge\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(11x-6-3x^2\right)$.

4

Ответ: $[0;3];\ (5;6)$

Решите неравенство $\dfrac{x^3-13x^2+44x-30}{x^2-11x+30}\ge x-1$.

5

Ответ: $\left(\frac{15}{8};2\right)$

Решите неравенство $\log_{8x^2-23x+15}(2x-2)\le 0$.

6

Ответ: $[-1;0);\ (0;3]$.

Решите неравенство $3^{\log_2 x^2}+2\cdot|x|^{\log_2 9}\le 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0,5}(2x+3)}$.

Ответы

7

Ответ: $[0;2);\ (2;4]$

Решите неравенство $2\log_{(x^2-4x+5)^2}\left(4x^2+1\right)\le\log_{x^2-4x+5}\left(3x^2+4x+1\right)$.

8

Ответ: $(0;1);\ 9;\ (27;\ +\infty)$

Решите неравенство $\dfrac{\log_3 x}{\log_3\left(\dfrac{x}{27}\right)}\ge\dfrac{4}{\log_3 x}+\dfrac{8}{\log_3^2 x-\log_3 x^3}$.

9

Ответ: $(0;1);\ 2;\ (8;\ +\infty)$

Решите неравенство $\dfrac{2}{\log_2 x}+\dfrac{5}{\log_2^2 x-\log_2 x^3}\le\dfrac{\log_2 x}{\log_2\left(\dfrac{x}{8}\right)}$.

10

Ответ: $(-\infty;0];\ \left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

Решите неравенство $\log_2\left(4^x+81^x-4\cdot 9^x+3\right)\ge 2x$.

11

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{36}\right];\ [6;216);\ (216;\ +\infty)$

Решите неравенство $1+\dfrac{7}{\log_6 x-3}+\dfrac{10}{\log_6^2 x-\log_6\left(216x^6\right)+12}\ge 0$.

12

Ответ: $\left(\dfrac{3}{2};2\right];\ [3;6)$

Решите неравенство $\log_{|x|}\left(15x-18-2x^2\right)\le 2$.

Ответы

13

Ответ: $0;\ \left(1; \log_2 3\right)$.

Решите неравенство $\dfrac{2^x}{2^x-3}+\dfrac{2^x+1}{2^x-2}+\dfrac{5}{4^x-5\cdot 2^x+6}\le 0$.

14

Ответ: $\left(\frac{1}{8};\frac{1}{2}\right);\ (8;32)$

Решите неравенство $\left(\log_2^2 x-2\log_2 x\right)^2+36\log_2 x+45<18\log_2^2 x$.

15

Ответ: $(-12;-3];(-2;0);(0;2);[4;+\infty)$

Решите неравенство $\log_{0{,}25x^2}\left(\dfrac{x+12}{4}\right)\le 1$.

Решите неравенство $\log_{\frac{3x-4}{x+1}}\left(2x^2-3x\right)\ge \log_{\frac{3x-4}{x+1}}\left(17x-20-3x^2\right)$.

16

Ответ: $2;\ \left(\dfrac{5}{2};4\right)$.

17

Ответ: $\left(-5;-2\sqrt{5}\right];\ 0;\ \left[2\sqrt{5};\ 5\right)$

Решите неравенство $\log_5^2\left(25-x^2\right)-3\log_5\left(25-x^2\right)+2\ge 0$.

18

Решите неравенство $1+\dfrac{7}{\log_6 x-3}+\dfrac{10}{\log_6^2 x-\log_6\left(216x^6\right)+12}\ge 0$.

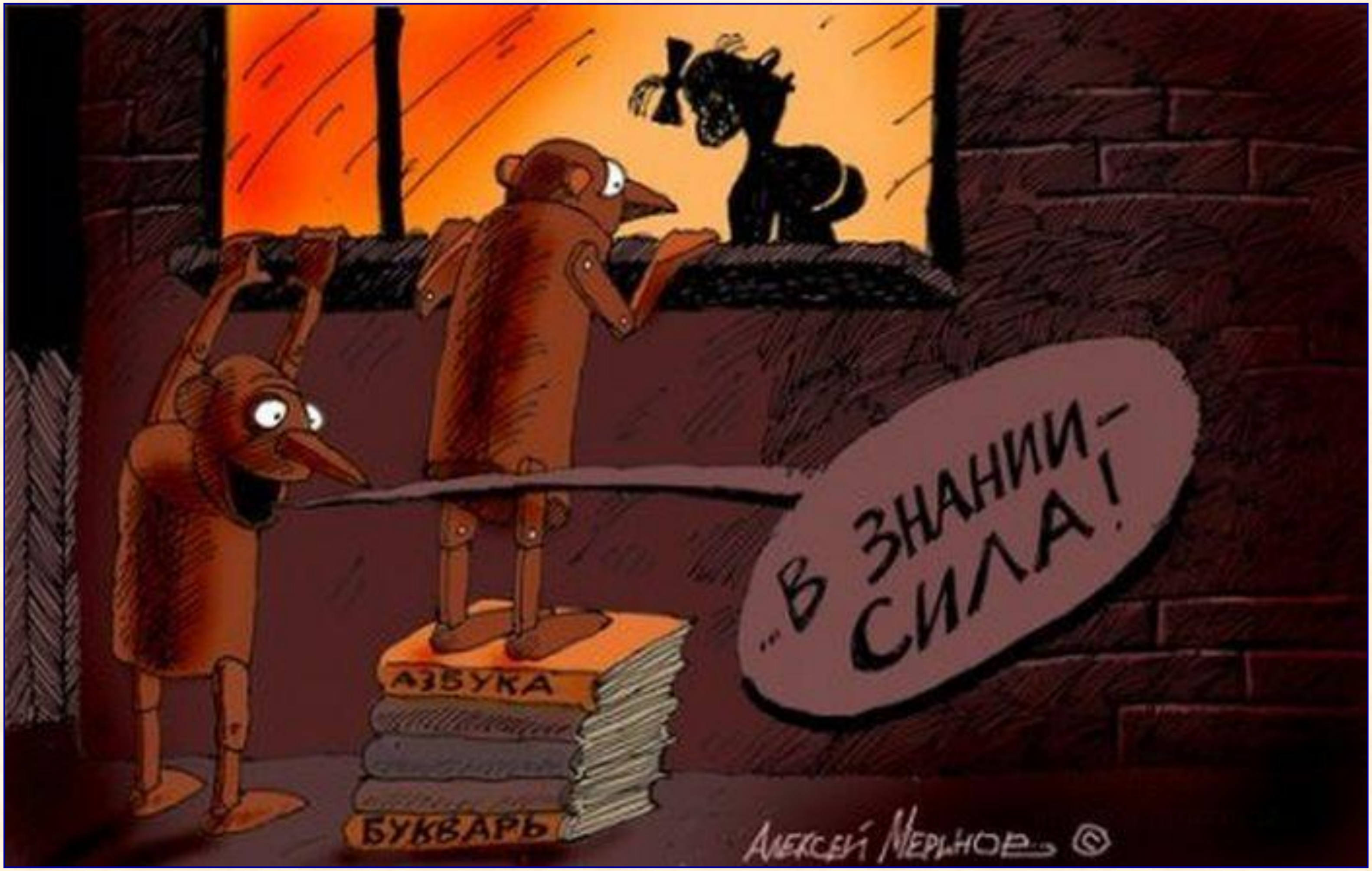
Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{36}\right];\ [6;216);\ (216;\ +\infty)$

19

Ответ: $[-1;0);\ (0;4]$

Решите неравенство $2^{1+\log_3 x^2}+2\cdot|x|^{\log_3 4}\le 4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(3x+4)}$.

Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Математика. Подготовка к ЕГЭ: задание С3. Решение неравенств с одной переменной. – Ростов-на-Дону, Легион. – 2014. – 176 с. – (Готовимся к ЕГЭ.)



Спасибо за внимание!

А.А. Прокофьев
Тел.: (499) 729-73-43
E-mail: aaprokof@yandex.ru