Библиотечка СтатГрад

ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

ЕГЭ 2018

ЕГЭ 2018

МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ФГОС

Государственное автономное образовательное учреждение
дополнительного профессионального образования города Москвы
«Центр педагогического мастерства»

Математика

Подготовка к ЕГЭ в 2018 году

Профильный уровень

Диагностические работы

Библиотечка СтатГрад

Издание соответствует Федеральному государственному
образовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2018

УДК 373:51
ББК 22.1я72
М33

М33 Математика. Подготовка к ЕГЭ в 2018 году. Профильный уровень. Диагностические работы. — М.: МЦНМО, 2018.

ISBN 978-5-4439-1187-8

Данное пособие предназначено для отработки практических умений и навыков учащихся при подготовке к экзамену по математике в 11 классе в формате ЕГЭ на профильном уровне. Оно содержит варианты диагностических работ по математике, содержание которых соответствует контрольно-измерительным материалам, разработанным Федеральным институтом педагогических измерений для проведения Единого государственного экзамена. В книгу входят также ответы к заданиям и критерии проверки и оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом.

Материалы книги рекомендованы учителям и методистам для выявления уровня и качества подготовки учащихся по предмету, определения степени их готовности к Единому государственному экзамену.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

Оригинал-макет издания подготовлен в ГАОУ ДПО ЦПМ.

В сборнике использованы задания, предложенные
М. А. Волчкевичем, И. Р. Высоцким, Р. К. Гординым, О. Н. Косухиным, М. Я. Пратусевичем,
А. Р. Рязановским, А. В. Семеновым, П. В. Семеновым, А. С. Трепалиным, А. В. Хачатуряном,
С. А. Шестаковым

Учебно-методическое издание

Математика. Подготовка к ЕГЭ в 2018 году.
Профильный уровень. Диагностические работы

Подписано в печать 03.07.2017 г. Формат 70 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Тираж 5000 экз. Заказ №   .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано ООО «Типографии „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс: +7(495) 619-08-30, 647-01-89. E-mail: mittelpressmail.ru.

ISBN 978-5-4439-1187-8

Предисловие

СтатГрад – это всероссийский интернет-проект, созданный для того, чтобы обеспечить каждое образовательное учреждение качественными дидактическими и методическими материалами. Основные направления деятельности СтатГрада – система диагностики образовательных достижений учащихся, методическая поддержка систем внутришкольного контроля, учебно-методические материалы для подготовки учащихся к ЕГЭ и ОГЭ. СтатГрад предоставляет методические материалы по всем ведущим дисциплинам школьной программы: по математике, физике, биологии, русскому языку, литературе, истории, обществознанию, химии, информатике, географии, иностранным языкам. Использование на уроках и при самостоятельной работе тренировочных и диагностических работ в формате ЕГЭ и ОГЭ, диагностических работ для 5–11 классов позволит учителям выявить пробелы в знаниях учащихся, а учащимся – подготовиться к государственным экзаменам, заранее попробовать свои силы. Авторы и эксперты СтатГрада – специалисты высокого класса, кандидаты и доктора наук, авторы учебной литературы для средней и высшей школы. В настоящее время СтатГрад сотрудничает более чем с 13 000 образовательных организаций России.

Настоящий сборник содержит диагностические материалы, разработанные специалистами СтатГрада для подготовки учащихся выпускных классов к ЕГЭ по математике (профильный уровень). Материалы соответствуют нормативным документам ФИПИ 2017 года.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Вариант 1

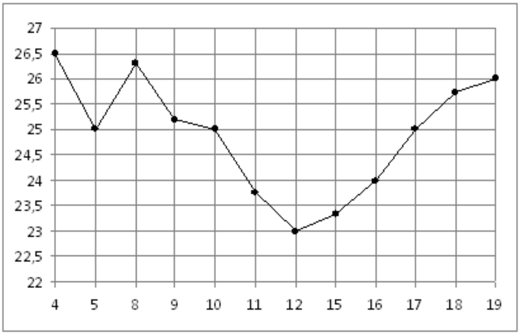
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Флакон шампуня стоит 160 рублей. Какое наибольшее количество флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25 %?

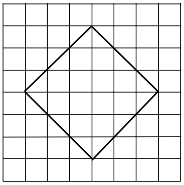
Ответ: ____________________________.

2 На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 19 апреля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену нефти на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за баррель).



Ответ: ____________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



Ответ: ____________________________.

4 В кармане у Дани было четыре конфеты — «Мишка», «Маска», «Белочка» и «Взлётная», а также ключи от квартиры. Вынимая ключи, Даня случайно выронил из кармана одну конфету. Найдите вероятность того, что потерялась конфета «Маска».

Ответ: ____________________________.

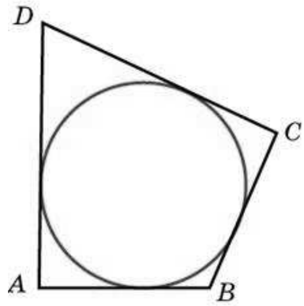
5

Найдите корень уравнения $(3x+4)^2=(3x+8)^2$.

Ответ: ____________________________.

6

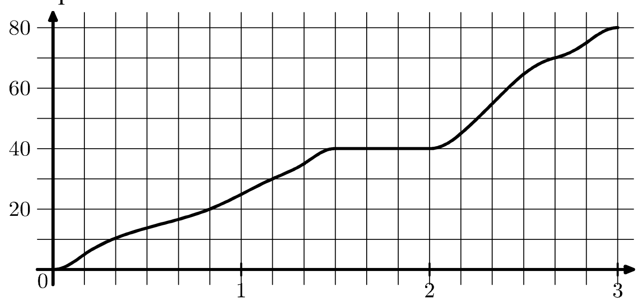
В четырёхугольник $ABCD$, периметр которого равен 48, вписана окружность, $CD=22$. Найдите AB.



Ответ: ____________________________.

7

На рисунке показан график движения автобуса. На горизонтальной оси отмечено время в часах, на вертикальной оси — пройденный путь в километрах. Найдите среднюю скорость автобуса за последний час пути. Ответ дайте в километрах в час.



Ответ: ____________________________.

8

В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 7, а сторона основания равна $\sqrt{39}$. Найдите высоту пирамиды.

Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите $-49\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0,2$.

Ответ: ____________________________.

10 При температуре $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ рельс имеет длину $l_0 = 20$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^{\circ}) = l_0(1+\alpha\cdot t^{\circ})$, где $\alpha = 1,2\cdot 10^{-5}(^{\circ}\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Ответ: ____________________________.

11 Автомобиль выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 340 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 300 км, с постоянной скоростью выехал мотоцикл. По дороге он сделал остановку на 40 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоцикла, если она больше скорости автомобиля на 5 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = x - \dfrac{1}{x} + 6$ на отрезке $[0,5;\ 13]$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\left(3\operatorname{tg}^2 x - 1\right)\sqrt{-5\cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB = BC$) треугольник ABC. Точки K и M — середины рёбер A_1B_1 и AC соответственно.
а) Докажите, что $KM = KB$.
б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 8$, $AC = 6$ и $AA_1 = 3$.

15 Решите неравенство

$$\frac{15^x - 3^{x+1} - 5^{x+1} + 15}{-x^2 + 2x} \geq 0.$$

16 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.
а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.
б) Вычислите длину стороны BC и радиус данной окружности, если $\angle A = 45^\circ$, $B_1C_1 = 6$ и площадь треугольника AB_1C_1 в восемь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

17 По бизнес-плану четырёхлетний проект предполагает начальное вложение 12 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в конце первого и второго года, а также целое число m млн рублей в конце третьего и четвёртого года. Найдите наименьшее значение n, при котором первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, и наименьшее такое значение m, что при найденном ранее значении n первоначальные вложения за четыре года как минимум утроятся.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $y = \dfrac{5a - 15x + ax}{x^2 - 2ax + a^2 + 25}$ содержит отрезок [0; 1].

19 Будем называть четырёхзначное число *интересным*, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 3111.
а) Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна 221.
б) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, разность между которыми равна 2001?
в) Найдите наименьшее нечётное число, для которого не существует кратного ему интересного четырёхзначного числа.

Вариант 2

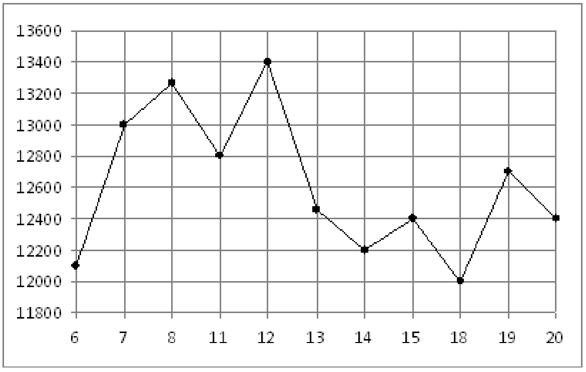
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Флакон шампуня стоит 140 рублей. Какое наибольшее количество флаконов можно купить на 900 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35 %?

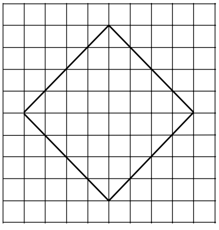
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



Ответ: ___________________________.

4

В кармане у Саши было четыре конфеты — «Мишка», «Взлётная», «Белочка» и «Грильяж», а также ключи от квартиры. Вынимая ключи, Саша случайно выронил из кармана одну конфету. Найдите вероятность того, что потерялась конфета «Взлётная».

Ответ: ____________________________.

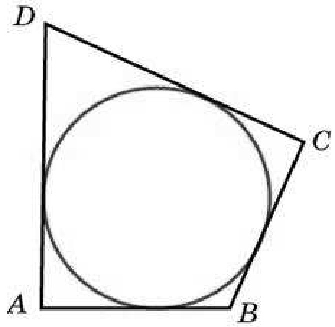
5

Найдите корень уравнения $(3x-11)^2=(3x+2)^2$.

Ответ: ____________________________.

6

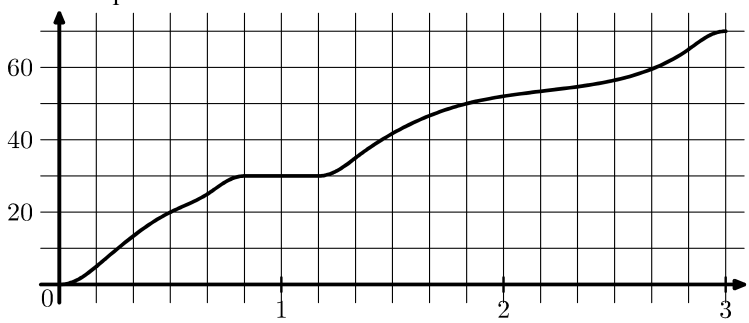
В четырёхугольник $ABCD$, периметр которого равен 48, вписана окружность, $CD=15$. Найдите AB.



Ответ: ____________________________.

7

На рисунке показан график движения автобуса. На горизонтальной оси отмечено время в часах, на вертикальной оси — пройденный путь в километрах. Найдите среднюю скорость автобуса за первые 50 минут пути. Ответ дайте в километрах в час.



Ответ: ____________________________.

8 В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 7, а сторона основания равна $6\sqrt{2}$. Найдите высоту пирамиды.

Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите $-25\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$.

Ответ: ____________________________.

10 При температуре $0\,°\text{C}$ рельс имеет длину $l_0 = 20$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t°) = l_0(1 + \alpha \cdot t°)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,(°\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, $t°$ — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Ответ: ____________________________.

11 Автомобиль выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 357 км. Одновременно с ним из города C в город B, расстояние между которыми равно 351 км, с постоянной скоростью выехал мотоцикл. По дороге он сделал остановку на 30 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город B одновременно. Найдите скорость мотоцикла, если она больше скорости автомобиля на 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = x - \dfrac{6}{x} + 14$ на отрезке $[0{,}5; 19]$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\left(1 - 3\operatorname{tg}^2 x\right)\sqrt{7\sin x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB = BC$) треугольник ABC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.
а) Докажите, что $KM \perp AC$.
б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 6$, $AC = 8$ и $AA_1 = 3$.

15 Решите неравенство
$$\frac{10^x - 25 \cdot 2^x - 2 \cdot 5^x + 50}{5x - x^2 - 4} \geq 0.$$

16 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.
б) Вычислите длину стороны BC и радиус данной окружности, если $\angle A=135^\circ$, $B_1C_1=10$ и площадь треугольника AB_1C_1 в семь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

17 По бизнес-плану четырёхлетний проект предполагает начальное вложение 25 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 12 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в конце первого и второго года, а также целое число m млн рублей в конце третьего и четвёртого года. Найдите наименьшее значение n, при котором первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, и наименьшее такое значение m, что при найденном ранее значении n первоначальные вложения за четыре года как минимум утроятся.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $y = \dfrac{5a + 150x - 10ax}{100x^2 + 20ax + a^2 + 25}$ содержит отрезок [0; 1].

19 Будем называть четырёхзначное число *интересным*, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 3111.
а) Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна 17.
б) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, разность между которыми равна 109?
в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему интересного четырёхзначного числа.

Вариант 3

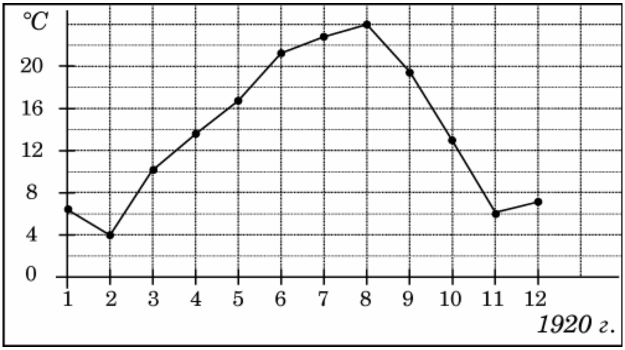
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 На счёте Жениного мобильного телефона было 74 рубля, а после разговора с Вовой остался 41 рубль. Сколько минут длился разговор с Вовой, если одна минута разговора стоит 1 рубль 50 копеек?

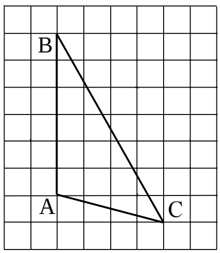
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB.



Ответ: ___________________________.

4

Фабрика выпускает сумки. В среднем на 136 качественных сумок приходится 14 сумок, имеющих скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что выбранная в магазине сумка окажется с дефектами. Результат округлите до сотых.

Ответ: ____________________________.

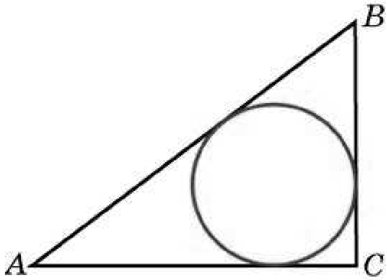
5

Найдите корень уравнения $\frac{1}{10x+6}=1$.

Ответ: ____________________________.

6

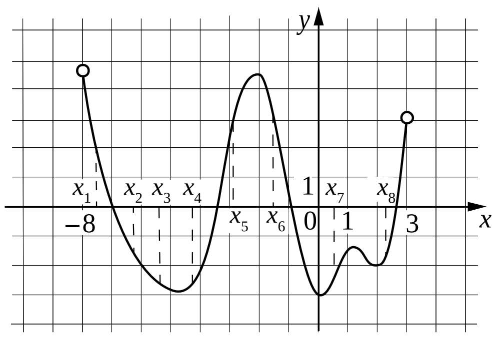
В треугольнике ABC известно, что $AC=36$, $BC=15$, угол C равен $90°$. Найдите радиус вписанной окружности.



Ответ: ____________________________.

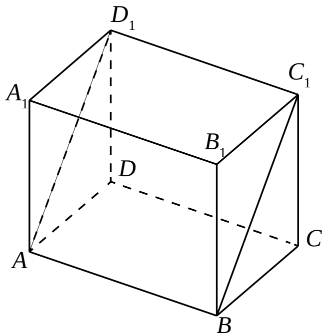
7

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-8;\ 3)$. Сколько из отмеченных точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 принадлежат промежуткам убывания функции?



Ответ: ____________________________.

8 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB=3$, $AD=6$, $AA_1=8$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, B и C_1.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(b^{\sqrt{2}}\right)^{8\sqrt{2}}}{b^{14}}$ при $b=0,5$.

Ответ: ___________________________.

10 Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле $R=r_{пок}-\dfrac{r_{пок}-r_{экс}}{(K+1)^m}$, где $m=\dfrac{0,02K}{r_{пок}+0,1}$, $r_{пок}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{экс}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 24, их средняя оценка равна 0,86, а оценка экспертов равна 0,56.

Ответ: ___________________________.

11 Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 50 кругов по кольцевой трассе протяжённостью 4 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 30 минут. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 12 минут? Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $-3x^5-5x^3+7$ на отрезке $[-2;\ 0]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{5\cos x+3}{5\sin x-4}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0;2\pi]$.

14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=2:5$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F:FB=1:6$, а точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=5$, $AD=6$, $AA_1=14$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1.

15 Решите неравенство

$$\frac{x^4-2x^3+x^2}{x^2+x-2}-\frac{2x^3+x^2+x-1}{x+2}\le 1.$$

16 Точки P, Q, W делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AP:PB=CQ:QB=CW:WD=1:4$, радиус окружности, описанной около треугольника PQW, равен 10, $PQ=16$, $QW=12$, угол PWQ острый.

а) Докажите, что треугольник PQW прямоугольный.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

17 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 8 % в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+a)^2}=\left|a\sqrt{2}\right|,\\ x^2+y^2\le 8\end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 Будем называть четырёхзначное число *очень счастливым*, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140.

а) Существуют ли одиннадцать последовательных четырёхзначных чисел, среди которых ровно два очень счастливых?

б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2017?

в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.

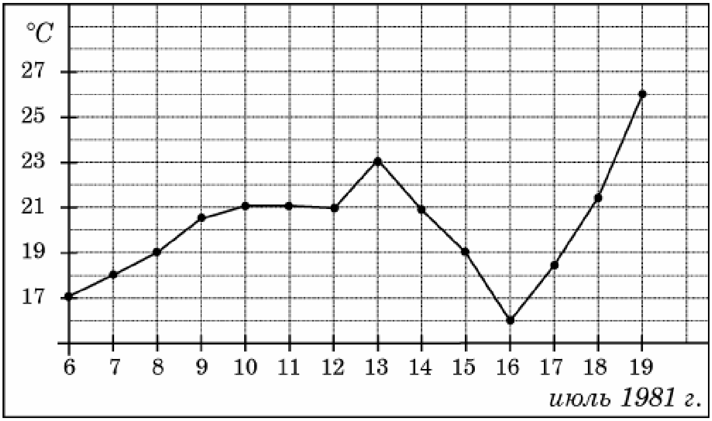
Вариант 4
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 На счёте Олиного мобильного телефона был 61 рубль, а после разговора с Игорем осталось 46 рублей. Сколько минут длился разговор с Игорем, если одна минута разговора стоит 2 рубля 50 копеек?

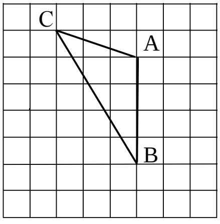
Ответ: ____________________________.

2 На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Бресте каждый день с 6 по 19 июля 1981 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей среднесуточными температурами за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ____________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB.



Ответ: ____________________________.

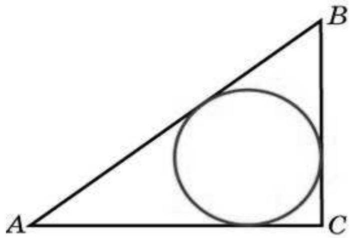
4 Фабрика выпускает сумки. В среднем на 118 качественных сумок приходится 2 сумки, имеющие скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что выбранная в магазине сумка окажется с дефектами. Результат округлите до сотых.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $\frac{1}{8x+3}=5$.

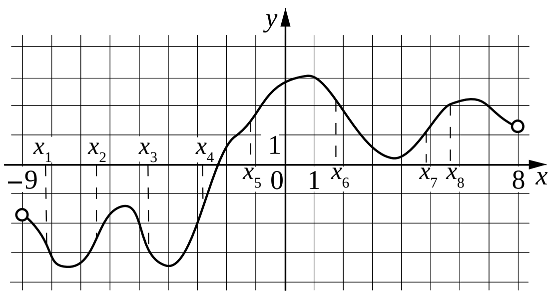
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC известно, что $AC=24$, $BC=10$, угол C равен $90°$. Найдите радиус вписанной окружности.



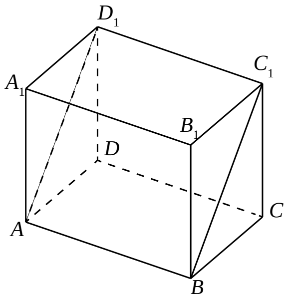
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-9;\,8)$. Сколько из отмеченных точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 принадлежат промежуткам убывания функции?



Ответ: ___________________________.

8 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB=2$, $AD=24$, $AA_1=32$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, B и C_1.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(b^{\sqrt{2}}\right)^{9\sqrt{2}}}{b^{16}}$ при $b=8$.

Ответ: ___________________________.

10 Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле $R=r_{пок}-\dfrac{r_{пок}-r_{экс}}{(K+1)^m}$, где $m=\dfrac{0,02K}{r_{пок}+0,1}$, $r_{пок}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{экс}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 15, их средняя оценка равна 0,5, а оценка экспертов равна 0,42.

Ответ: ___________________________.

11 Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 60 кругов по кольцевой трассе протяжённостью 5 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 30 минут. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 10 минут? Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $-3x^5-20x^3+12$ на отрезке $[-4;\ 0]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{5\sin x-3}{5\cos x-4}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=1:2$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F:FB=1:5$, а точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=2$, $AD=6$, $AA_1=6$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1.

15 Решите неравенство

$$\frac{4x^4-4x^3+x^2}{-2x^2+5x-2}+\frac{2x^3-7x^2+5x+1}{x-2}\le 0.$$

16 Точки P, Q, W делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AP:PB=CQ:QB=CW:WD=3:4$, радиус окружности, описанной около треугольника PQW, равен 10, $PQ=16$, $QW=12$, угол PWQ острый.

а) Докажите, что треугольник PQW прямоугольный.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

17 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 9 % в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-a)^2}=\left|a\sqrt{2}\right|,\\ x^2+y^2\le 18\end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 Будем называть четырёхзначное число *очень счастливым*, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140.

а) Существуют ли двадцать последовательных четырёхзначных чисел, среди которых нет ни одного очень счастливого числа?

б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2016?

в) Найдите наименьшее нечётное число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.

Вариант 5

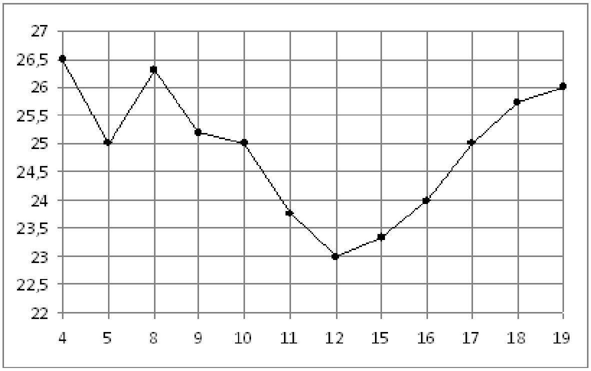
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Флакон шампуня стоит 160 рублей. Какое наибольшее количество флаконов можно купить на 1200 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35 %?

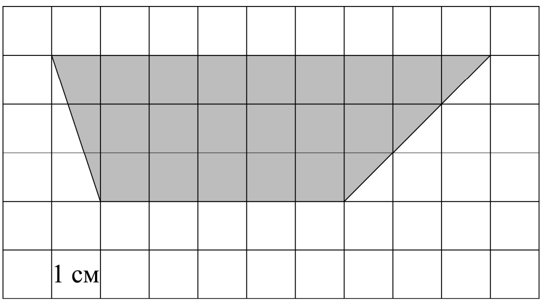
Ответ: ____________________________.

2 На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 19 апреля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену нефти на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за баррель).



Ответ: ____________________________.

3 Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ____________________________.

4 В группе туристов 32 человека. Их вертолётом в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 4 человека за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист К. полетит пятым рейсом вертолёта.

Ответ: ____________________________.

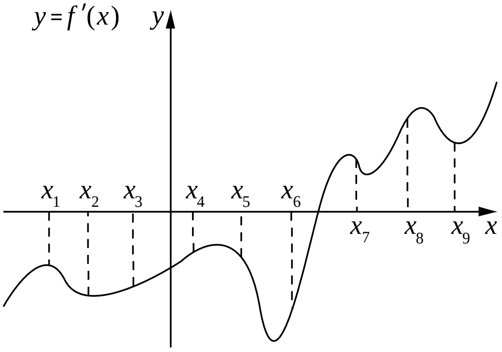
5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{2}{2x-54}}=\frac{1}{3}$.

Ответ: ____________________________.

6 Сторона AB треугольника ABC равна 37. Противолежащий ей угол C равен $150°$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



Ответ: ____________________________.

8 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO=24$, $SD=26$. Найдите длину отрезка AC.

Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{8^{6,4}}{16^{4,05}}$.

Ответ: ____________________________.

10 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t)=1,8+10t-5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Какое время мяч будет находиться на высоте не менее 5 метров? Ответ дайте в секундах.

Ответ: ____________________________.

11 От пристани *A* к пристани *B*, расстояние между которыми равно 154 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 3 часа после этого следом за ним со скоростью, на 3 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт *B* оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции $y=(x-2)^2(x-4)+5$ на отрезке $[1;3]$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x}{\log_4(\sin x)}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3}{2}\pi\right]$.

14 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

15 Решите неравенство $\dfrac{3^{2x} - 54 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2(x+1)} - 1}{x+3} \le 0$.

16 Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.

а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD.

б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $AC = 12$ и $BD = 6{,}5$.

17 По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект **целое** число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 миллионов рублей в первый и второй годы, а также по 10 миллионов в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 100 миллионов, а за четыре года станут больше 170 миллионов рублей.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left((x-5)^2 + (y-3)^2 - 9\right)\left((x-2)^2 + (y+1)^2\right) \le 0, \\ y = ax + a + 3 \end{cases}$$

не имеет решений.

19 Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ и $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{b_2}{a_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a_2}{b_2}$, если известно, что $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}}$ — различные натуральные числа?

Вариант 6

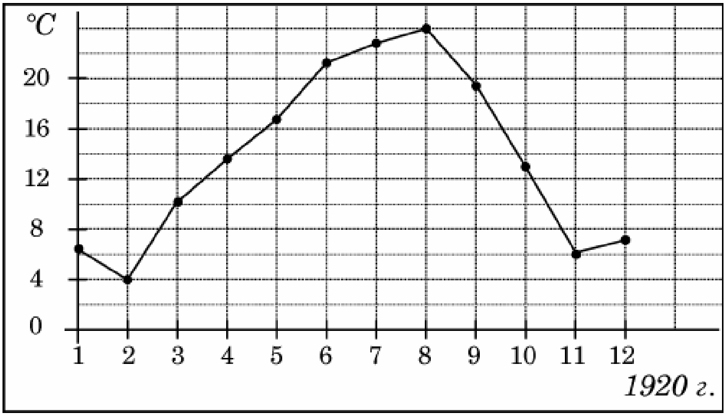
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Флакон шампуня стоит 150 рублей. Какое наибольшее количество флаконов можно купить на 800 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25 %?

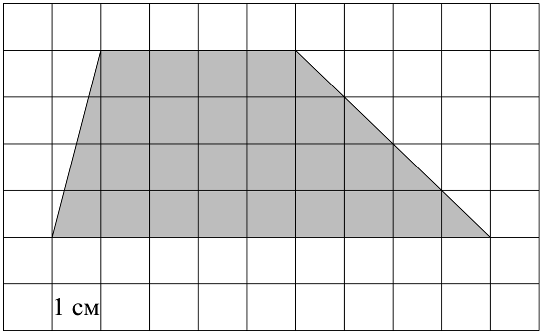
Ответ: ____________________________.

2 На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какой была наибольшая среднемесячная температура в Сочи в 1920 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ____________________________.

3 Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ____________________________.

4 В группе туристов 30 человек. Их вертолётом в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 3 человека за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист Н. полетит четвёртым рейсом вертолёта.

Ответ: ____________________________.

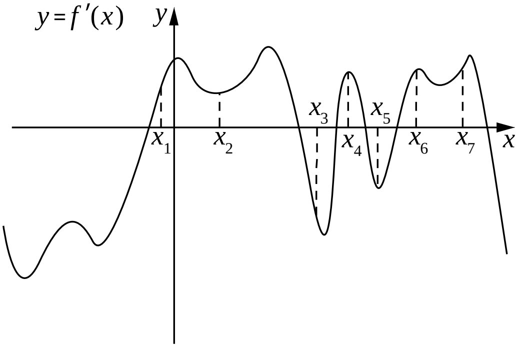
5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{10}{4x-58}}=\dfrac{1}{7}$.

Ответ: ____________________________.

6 Сторона AB треугольника ABC равна 42. Противолежащий ей угол C равен 150°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены семь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



Ответ: ___________________________.

8 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 48$, $SB = 60$. Найдите длину отрезка BD.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{7^{6,4}}{49^{2,2}}$.

Ответ: ___________________________.

10 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1 + 12t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Какое время мяч будет находиться на высоте не менее 5 метров? Ответ дайте в секундах.

Ответ: ___________________________.

11 От пристани A к пристани B, расстояние между которыми равно 192 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 4 часа после этого следом за ним со скоростью, на 4 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y=(x+3)^2(x+5)-1$ на отрезке $[-4;-1]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x-\sin x}{\log_7(\cos x)}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;-\dfrac{7}{2}\pi\right]$.

14 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 3. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

15 Решите неравенство $\dfrac{5^{2x+1}-75\cdot 0{,}2^{2x}-10}{x+2}\le 0$.

16 Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.
а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD.
б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $AC = 15$ и $BD = 8{,}5$.

17 По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект **целое** число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 миллионов рублей в первый и второй годы, а также по 10 миллионов в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 125 миллионов, а за четыре года станут больше 200 миллионов рублей.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left((x-3)^2+(y-3)^2-1\right)\left((x-1)^2+y^2\right) \le 0, \\ y-2=ax \end{cases}$$

не имеет решений.

19 Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ состоят из натуральных чисел.
а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + a_3b_3 = 3a_2b_2$?
б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$?
в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3, если $a_1b_1 + 2a_4b_4 \le 300$?

Вариант 7

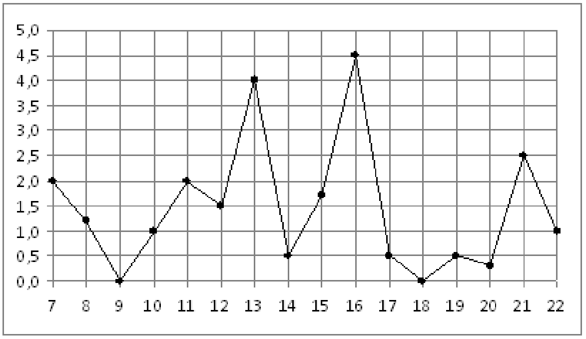
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Стоимость проездного билета на месяц составляет 800 рублей, а стоимость билета на одну поездку — 22 рубля. Аня купила проездной и сделала за месяц 45 поездок. На сколько рублей больше она бы потратила, если бы покупала билеты на одну поездку?

Ответ: ______________________________.

2 На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Мурманске с 7 по 22 ноября 1995 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какое наибольшее количество осадков выпадало в период с 7 по 14 ноября. Ответ укажите в миллиметрах.



Ответ: ______________________________.

3 Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1;7), (9;7), (1;9).

Ответ: ______________________________.

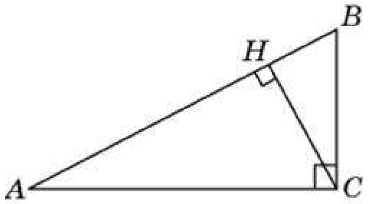
4 На олимпиаде по математике 400 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 120 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: ______________________________.

5 Решите уравнение $\frac{3}{14}x^2=21\frac{3}{7}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

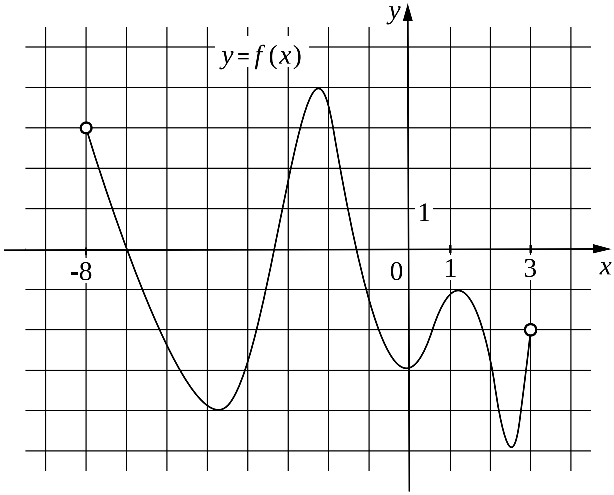
Ответ: ____________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, угол A равен $30°$, $AB=86$. Найдите AH.



Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-8;3)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=18$.



Ответ: ____________________________.

8 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны $14\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками C и F_1.

Ответ: ____________________________.

1

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(3\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{8-\sqrt{15}}$.

Ответ: ___________________________.

10 После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h=5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,8 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,1 с? Ответ выразите в метрах.

Ответ: ___________________________.

11 На изготовление 72 деталей первый рабочий тратит на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 108 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку максимума функции $y=x^3-147x+11$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $8\cdot 16^{\sin^2 x}-2\cdot 4^{\cos 2x}=63$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{7\pi}{2};\, 5\pi\right]$.

14 В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 5. На ребре AD отмечена точка T так, что $AT:TD=2:1$. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.

б) Найдите площадь сечения.

15 Решите неравенство $(5-2x)\log_{-x^2+4x-3}(x-1)\geq 0$.

16 Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке M, а окружность с диаметром CD пересекает основание AD в точке N. Отрезки AM и CN пересекаются в точке P.

а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCP$ можно вписать окружность.

б) Найдите радиус этой окружности, если $BC=7$, $AD=17$.

17 Планируется выдать льготный кредит на **целое** число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 7 млн рублей.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2-2(x-y)a=9-6a-a^2, \\ x^2+y^2+2(3x+4y)a=1-2a-24a^2 \end{cases}$$

не имеет решений.

19 Известно, что a, b, c и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{8}{29}$?

б) Может ли дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$, если $a>3b$ и $c>7d$?

Вариант 8

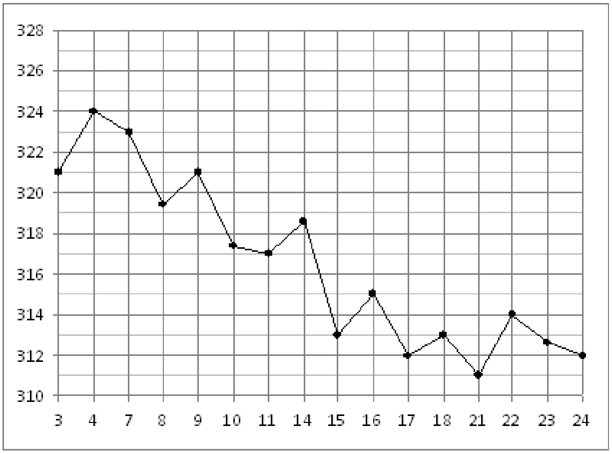
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Стоимость проездного билета на месяц составляет 750 рублей, а стоимость билета на одну поездку — 19 рублей. Аня купила проездной и сделала за месяц 45 поездок. На сколько рублей больше она бы потратила, если бы покупала билеты на одну поездку?

Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показана цена золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 24 октября 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену золота на момент закрытия торгов в период с 15 по 23 октября (в долларах США за унцию).



Ответ: ___________________________.

3 Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1;2), (3;2), (1;5).

Ответ: ___________________________.

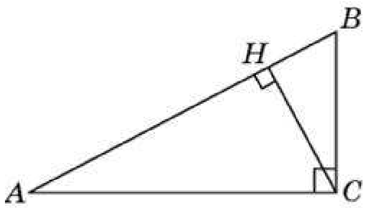
4 На олимпиаде по социологии 400 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 110 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: ____________________________.

5 Решите уравнение $\frac{4}{9}x^{2}=\frac{1}{4}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

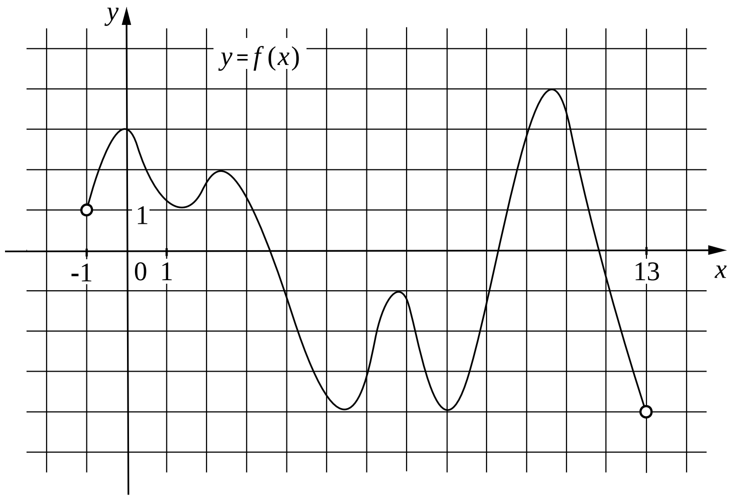
Ответ: ____________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, угол A равен $30°$, $AB=42$. Найдите AH.



Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-1;13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=-10$.



Ответ: ____________________________.

8 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны $31\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками B_1 и E.

Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt{11}+\sqrt{13}\right)^2}{12+\sqrt{143}}$.

Ответ: ____________________________.

10 После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h=5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 1,4 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

Ответ: ____________________________.

11 На изготовление 99 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 110 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

Ответ: ____________________________.

12 Найдите точку максимума функции $y=x^3-108x+11$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $4\cdot 16^{\sin^2 x} - 6\cdot 4^{\cos 2x} = 29$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

14 В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 5. Боковое ребро пирамиды равно 9. На ребре AD отмечена точка T так, что $AT:TD = 1:2$. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.

б) Найдите площадь сечения.

15 Решите неравенство $(7-2x)\log_{-x^2+6x-8}(x-2) \geq 0$.

16 Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке M, а окружность с диаметром CD пересекает основание AD в точке N. Отрезки AM и CN пересекаются в точке P.

а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCP$ можно вписать окружность.

б) Найдите радиус этой окружности, если $BC = 7$, $AD = 23$.

17 Планируется выдать льготный кредит на **целое** число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 10 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 6 млн рублей.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(y-x)a=1+2a-a^2, \\ x^2+y^2+2(x-y)a=1-2a-a^2 \end{cases}$$

не имеет решений.

19 Известно, что a, b, c и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{7}{23}$?

б) Может ли дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ быть в 12 раз меньше, чем сумма $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$, если $a>4b$ и $c>8d$?

Вариант 9

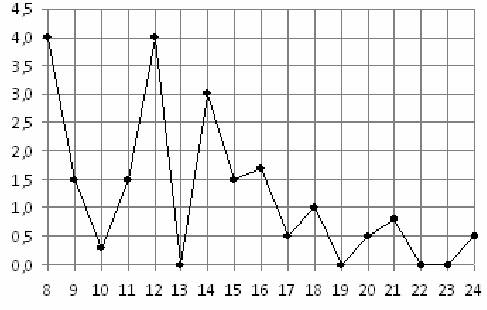
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Показания счётчика электроэнергии 1 февраля составляли 71 181 Вт · ч, а 1 марта — 71 326 Вт · ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за февраль, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 5 рублей 20 копеек? Ответ дайте в рублях.

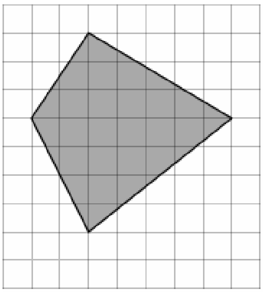
Ответ: ____________________________.

2 На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа за данный период впервые выпало ровно 1,5 миллиметра осадков.



Ответ: ____________________________.

3 Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1.



Ответ: ____________________________.

4 На конференцию приехали 6 учёных из Швейцарии, 3 из Болгарии и 6 из Австрии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что третьим окажется доклад учёного из Болгарии.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{3}{5x-30}}=\frac{1}{5}$.

Ответ: ___________________________.

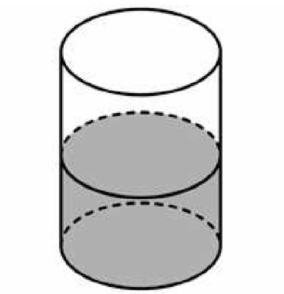
6 Основания равнобедренной трапеции равны 43 и 7. Высота трапеции равна 27. Найдите тангенс острого угла трапеции.

Ответ: ___________________________.

7 Прямая $y=-3x+8$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+7x-6$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ___________________________.

8 В цилиндрический сосуд налили 2200 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 16 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 6 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(17a^{12}b^3-\left(5a^4b\right)^3\right):\left(4a^{12}b^3\right)$ при $a=-2{,}8$ и $b=5{,}3$.

Ответ: ____________________________.

10 Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p=600$ руб. за единицу, переменные текущие затраты на производство одной единицы продукции составляют $v=400$ руб., постоянные расходы предприятия $f=600\,000$ руб. в месяц. Месячная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q)=q(p-v)-f$, где q (единиц продукции) — месячный объём производства. Определите значение q, при котором месячная прибыль предприятия будет равна 500 000 руб.

Ответ: ____________________________.

11 Пристани A и B расположены на озере, расстояние между ними равно 234 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из A в B. На следующий день после прибытия она отправилась обратно со скоростью на 4 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 8 часов. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость баржи на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y=8+\frac{5\pi\sqrt{3}}{18}-\frac{5\sqrt{3}}{3}x-\frac{10\sqrt{3}}{3}\cos x$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x-\sqrt{3}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\,2\pi\right]$.

14 В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 3 и радиусом основания 8 проведена хорда AB, равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD, перпендикулярный AB. Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD, лежат с одной стороны от сечения.
а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.
б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

15 Решите неравенство $\dfrac{35^{|x|}-5^{|x|}-5\cdot 7^{|x|}+5}{2^{\sqrt{x+2}}+1}\geq 0$.

16 Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.
а) Докажите, что $\angle ABM=\angle DBC=30°$.
б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC=9$.

17 У фермера есть два поля, каждое площадью 8 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 350 ц/га, а на втором — 200 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 300 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 2500 руб. за центнер, а свёклу — по цене 3000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(2x+a+1+\operatorname{tg} x\right)^2=\left(2x+a-1-\operatorname{tg} x\right)^2$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

19 Конечная возрастающая последовательность a_1, a_2, …, a_n состоит из $n\geq 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k\leq n-2$ выполнено равенство $4a_{k+2}=7a_{k+1}-3a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n=5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n\geq 3$ выполняться равенство $a_n=4a_2-3a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n=527$?

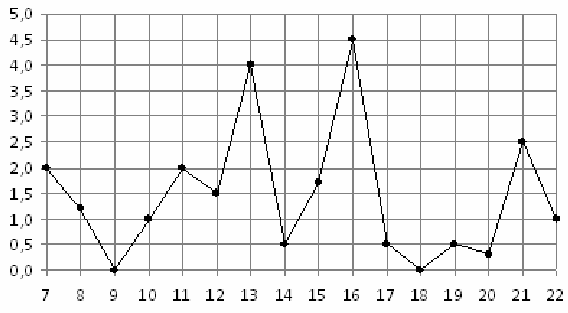
Вариант 10
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Показания счётчика электроэнергии 1 августа составляли 43 364 кВт·ч, а 1 сентября — 43 544 кВт·ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за август, если 1 кВт·ч электроэнергии стоит 5 рублей 10 копеек? Ответ дайте в рублях.

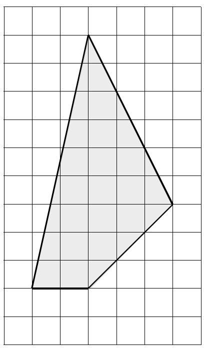
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпавших в Мурманске с 7 по 22 ноября 1995 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, в какой день за данный период впервые выпало ровно 0,5 миллиметров осадков.



Ответ: ___________________________.

3 Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1.



Ответ: ___________________________.

4

На конференцию приехали 5 учёных из Австрии, 4 из Германии и 6 из Сербии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что десятым окажется доклад учёного из Сербии.

Ответ: ___________________________.

5

Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{7}{4x-57}}=\dfrac{1}{3}$.

Ответ: ___________________________.

6

Основания равнобедренной трапеции равны 43 и 23. Высота трапеции равна 20. Найдите тангенс острого угла трапеции.

Ответ: ___________________________.

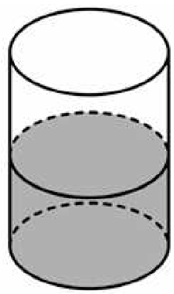
7

Прямая $y=3x+7$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2-5x+4$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ___________________________.

8

В цилиндрический сосуд налили 1800 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 12 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 2 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(16a^{12}\cdot b^3-\left(6a^4b\right)^3\right):\left(10a^{12}b^3\right)$ при $a=-1{,}9$ и $b=4{,}8$.

Ответ: ___________________________.

10 Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p=500$ руб. за единицу, переменные текущие затраты на производство одной единицы продукции составляют $v=300$ руб., постоянные расходы предприятия $f=700\,000$ руб. в месяц. Месячная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q)=q(p-v)-f$, где q (единиц продукции) — месячный объём производства. Определите значение q, при котором месячная прибыль предприятия будет равна 500 000 руб.

Ответ: ___________________________.

11 Пристани A и B расположены на озере, расстояние между ними равно 280 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из A в B. На следующий день после прибытия она отправилась обратно со скоростью на 4 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 8 часов. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость баржи на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции

$$y=11+\frac{7\sqrt{3}\pi}{18}-\frac{7\sqrt{3}}{3}x-\frac{14\sqrt{3}}{3}\cos x$$

на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x+\sqrt{3}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

14 В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 9 и радиусом основания 2 проведена хорда AB, равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD, перпендикулярный AB. Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD, лежат с одной стороны от сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.

б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

15 Решите неравенство $\dfrac{3^{|x|}\cdot 2^x-2^x-8\cdot 3^{|x|}+8}{2^{\sqrt{x}}-2}\geq 0$.

16 Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

а) Докажите, что лучи BM и BD делят угол ABC на три равные части.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC=6\sqrt{21}$.

17 У фермера есть два поля, каждое площадью 15 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 400 ц/га.
Фермер может продавать картофель по цене 2000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 3000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18 Найдите все значения a, при которых уравнение
$$(2x+a+1-\operatorname{tg} x)^2=(2x+a-1+\operatorname{tg} x)^2$$
имеет единственное решение на отрезке $[0;\ \pi]$.

19 Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ состоят из натуральных чисел.
а) Приведите пример таких прогрессий, для которых $a_1b_1+2a_3b_3=4a_2b_2$.
б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $2a_1b_1+a_4b_4=3a_2b_2$?
в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_2b_2, если $2a_1b_1+a_4b_4\le 210$?

Вариант 11

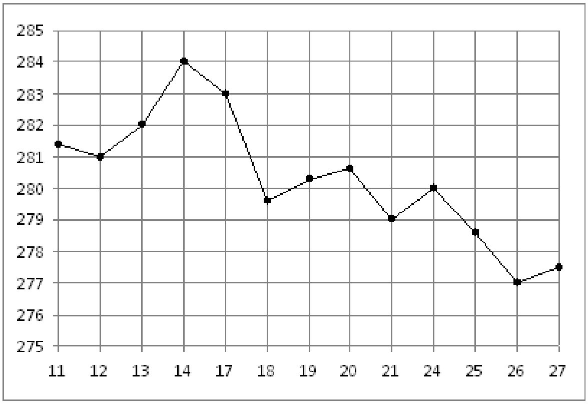
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Для покраски 1 кв. м потолка требуется 160 г краски. Краска продаётся в банках по 2,5 кг. Какое наименьшее количество банок краски нужно купить для покраски потолка площадью 45 кв. м?

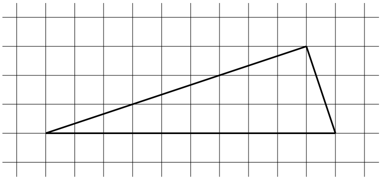
Ответ: ____________________________.

2 На рисунке жирными точками показана цена золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 11 по 27 июля 2000 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену золота на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за унцию).



Ответ: ____________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён прямоугольный треугольник. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



Ответ: ____________________________.

4 Из множества натуральных чисел от 58 до 82 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 6?

Ответ: ___________________________.

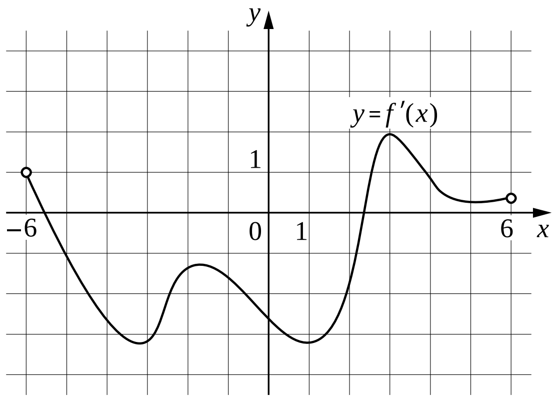
5 Найдите корень уравнения $x=\frac{6x-15}{x-2}$.
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Ответ: ___________________________.

6 Основания прямоугольной трапеции равны 14 и 18. Её площадь равна 64. Найдите острый угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

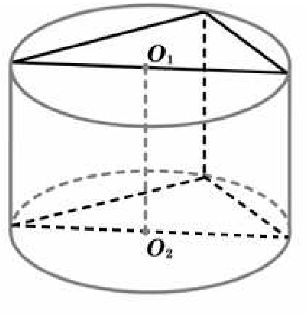
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6;6)$. В какой точке отрезка $[-5;-1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: ___________________________.

8 В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 7 и 8. Боковые рёбра призмы равны $\frac{10}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}}{x}-5x+1$ при $x=3$.

Ответ: ____________________________.

10 Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в Кельвинах) от времени работы: $T(t)=T_0+bt+at^2$, где t — время в минутах, $T_0=1350$ К, $a=-7{,}5$ К/мин^2, $b=105$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента выше 1650 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через сколько минут после начала работы температура достигнет критического значения 1650 К.

Ответ: ____________________________.

11 В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 81 % дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

Ответ: ____________________________.

12 Найдите точку максимума функции $y=x^3-75x+14$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{3}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}+2=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\,3\pi\right]$.

14 Отрезок AB — диаметр верхнего основания цилиндра, CD — диаметр нижнего, причём отрезки AB и CD не лежат на параллельных прямых.
а) Докажите, что у тетраэдра $ABCD$ скрещивающиеся рёбра попарно равны.
б) Найдите объём этого тетраэдра, если $AC=6$, $AD=8$, а радиус цилиндра равен 3.

15 Решите неравенство $\log_{49}(x+4)+\log_{\left(x^2+8x+16\right)}\sqrt{7}\le -\dfrac{3}{4}.$

16 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.
а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.
б) Вычислите длину стороны BC и радиус данной окружности, если $\angle A=30^\circ$, $B_1C_1=5$ и площадь треугольника AB_1C_1 в пять раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 4 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(2x+\ln(x+2a)\right)^2=\left(2x-\ln(x+2a)\right)^2$$

имеет единственный корень на отрезке $[0;1]$.

19 На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, разность которых делится на 5.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 38, если изначально по одному разу были написаны все натуральные числа от 11 до 22 включительно?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, произведение которых оканчивается на цифру 4, если изначально по одному разу были написаны квадраты натуральных чисел от 63 до 96 включительно?

в) Пусть известно, что на доске осталось ровно два числа, а изначально по одному разу были написаны квадраты натуральных чисел от 63 до 96 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

Вариант 12

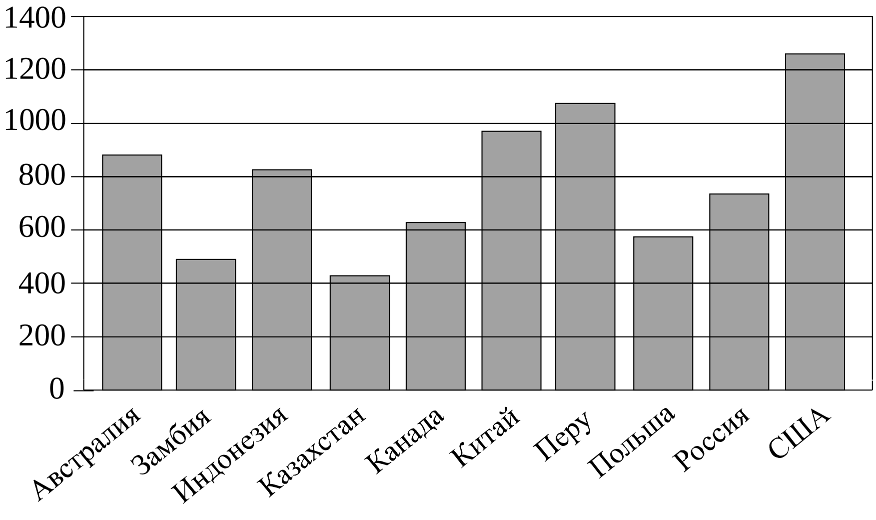
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Для покраски 1 кв. м потолка требуется 130 г краски. Краска продаётся в банках по 1,5 кг. Какое наименьшее количество банок краски нужно купить для покраски потолка площадью 52 кв. м?

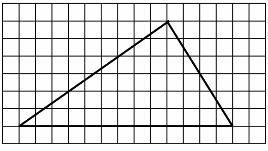
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показано количество выплавляемой меди в 10 странах мира в 2006 году. По горизонтали указываются страны, по вертикали — количество выплавляемой меди (в тысячах тонн). Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимает Польша?



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён прямоугольный треугольник. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



Ответ: ___________________________.

4 Из множества натуральных чисел от 53 до 64 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 4?

Ответ: ___________________________.

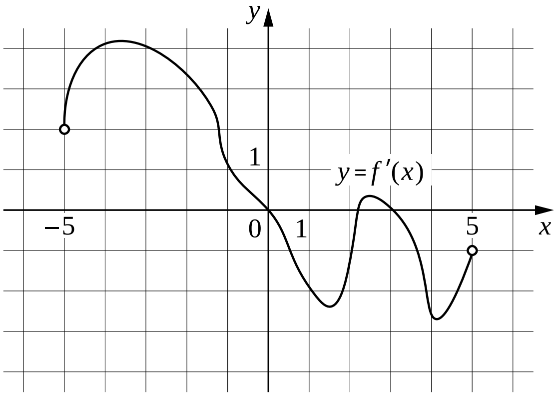
5 Найдите корень уравнения $x = \dfrac{-6x+1}{x-6}$.
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Ответ: ___________________________.

6 Основания прямоугольной трапеции равны 4 и 10. Её площадь равна 42. Найдите острый угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

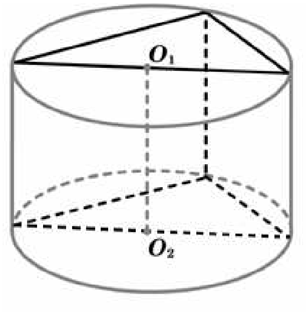
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;5)$. В какой точке отрезка $[-4;-1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: ___________________________.

8 В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 7. Боковые рёбра призмы равны $\frac{8}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{x}-7}{\sqrt{x}}+\frac{7\sqrt{x}}{x}+5x-2$ при $x=3$.

Ответ: ____________________________.

10 Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в Кельвинах) от времени работы: $T(t)=T_0+bt+at^2$, где t — время в минутах, $T_0=1300$ К, $a=-5$ К/мин^2, $b=75$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1550 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через сколько минут после начала работы температура достигнет критического значения 1550 К.

Ответ: ____________________________.

11 В среду акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в четверг подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 64 % дешевле, чем при открытии торгов в среду. На сколько процентов подорожали акции компании в среду?

Ответ: ____________________________.

12 Найдите точку максимума функции $y=x^3-48x+19$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)}=2.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

14 Отрезок AB — диаметр верхнего основания цилиндра, CD — диаметр нижнего, причём отрезки AB и CD не лежат на параллельных прямых.
а) Докажите, что у тетраэдра $ABCD$ скрещивающиеся рёбра попарно равны.
б) Найдите объём этого тетраэдра, если $AC=7$, $AD=6$, а радиус цилиндра равен $2{,}5$.

15 Решите неравенство $\log_{16}(x+5)+\log_{\left(x^2+10x+25\right)}2\geq\dfrac{3}{4}.$

16 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.
а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1
б) Вычислите длину стороны B_1C_1 и радиус данной окружности, если $\angle A=120°$, $BC=10\sqrt{7}$ и площадь треугольника AB_1C_1 в три раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 30 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}6S$	$0{,}25S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(x+\ln(x+a)\right)^2=\left(x-\ln(x+a)\right)^2$$

имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$.

19 На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, разность которых делится на 5.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 34, если изначально по одному разу были написаны все натуральные числа от 9 до 20 включительно?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, произведение которых оканчивается на цифру 1, если изначально по одному разу были написаны квадраты натуральных чисел от 59 до 92 включительно?

в) Пусть известно, что на доске осталось ровно два числа, а изначально по одному разу были написаны квадраты натуральных чисел от 59 до 92 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

Ответы к заданиям

№ задания	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1	8	9	22
2	23	12 000	20
3	3	4	3
4	0,25	0,25	0,09
5	– 2	1,5	– 0,5
6	2	9	6
7	40	36	4
8	6	5	30
9	45,08	– 7	0,25
10	12,5	37,5	0,8
11	90	54	80
12	4,5	2,5	7

№ задания	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
1	6	11	7
2	10	26,5	24
3	2	21	26
4	0,02	0,125	0,1
5	– 0,35	36	137
6	4	37	42
7	3	3	5
8	80	20	72
9	64	8	49
10	0,48	1,2	1,6
11	120	11	12
12	12	5	–1

№ задания	Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9
1	190	105	754
2	4	315	9
3	8	3	24,5
4	0,4	0,45	0,2
5	10	–0,75	21
6	64,5	31,5	1,5
7	5	7	–5
8	70	155	825
9	6	2	–27
10	0,75	2,6	5500
11	9	10	9
12	–7	–6	3

№ задания	Вариант 10	Вариант 11	Вариант 12
1	918	3	5
2	14	277	8
3	22,5	5	6,5
4	0,4	0,16	0,25
5	30	5	–1
6	2	45	45
7	4	–5	–1
8	300	282,5	170
9	–20	–13	14
10	6000	4	5
11	10	90	80
12	4	–5	–4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Вариант 1

13 а) Решите уравнение $\left(3\operatorname{tg}^2 x-1\right)\sqrt{-5\cos x}=0$.

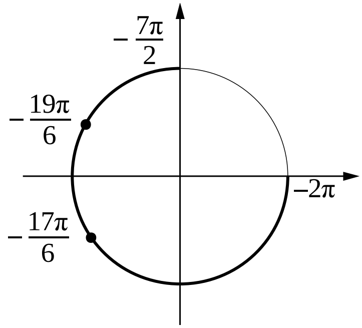
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

Решение.

а) Имеем $\left(3\operatorname{tg}^2 x-1\right)\sqrt{-5\cos x}=0$; $\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{3},\\ \cos x<0,\end{cases}$

откуда $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$ или $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$, отберём с помощью единичной окружности. Получаем $-\frac{19\pi}{6}$ и $-\frac{17\pi}{6}$.



Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т. п.

Ответ: а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; б) $-\frac{19\pi}{6}$; $-\frac{17\pi}{6}$.

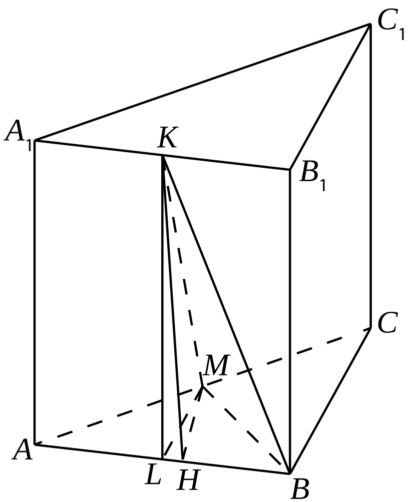
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB=BC$) треугольник ABC. Точки K и M — середины рёбер A_1B_1 и AC соответственно.

а) Докажите, что $KM=KB$.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB=8$, $AC=6$ и $AA_1=3$.

Решение.



а) Пусть L — середина ребра AB. Треугольник AMB прямоугольный, поэтому его медиана LM равна половине гипотенузы и равна LB. Из равенства треугольников KLM и KLB следует, что $KM = KB$.

б) Пусть MH — высота в треугольнике AMB. Имеем $MH \perp AB$ и $MH \perp BB_1$, следовательно, $MH \perp ABB_1$, угол HKM искомый. Вычисляя двумя способами площадь треугольника AMB, получим $MH \cdot AB = MA \cdot MB$, откуда $MH = \dfrac{MA \cdot MB}{AB} = \dfrac{3\sqrt{8^2 - 3^2}}{8} = \dfrac{3\sqrt{55}}{8}$, поэтому

$$\sin \angle HKM = \frac{HM}{KM} = \frac{HM}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3\sqrt{55}}{40} = \frac{3\sqrt{11}}{8\sqrt{5}}.$$

Ответ: б) $\arcsin \dfrac{3\sqrt{11}}{8\sqrt{5}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{15^x-3^{x+1}-5^{x+1}+15}{-x^2+2x}\ge 0.$$

<u>Решение.</u>

Преобразуем неравенство:

$$\frac{15^x-3^{x+1}-5^{x+1}+15}{-x^2+2x}\ge 0;$$

$$\frac{\left(5^x-3\right)\left(3^x-5\right)}{x(2-x)}\ge 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}0<x\le\log_5 3,\\ \log_3 5\le x<2.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left(0;\log_5 3\right],\ \left[\log_5 3;2\right).$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.

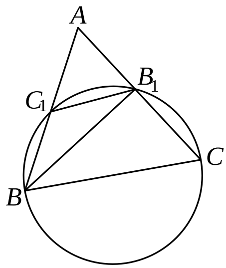
б) Вычислите длину стороны BC и радиус данной окружности, если $\angle A = 45^\circ$, $B_1C_1 = 6$ и площадь треугольника AB_1C_1 в восемь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

Решение.

а) Заметим, что $\angle AB_1C_1 + \angle C_1B_1C = 180^\circ$. Четырёхугольник BCB_1C_1 вписан в окружность, поэтому $\angle C_1BC + \angle C_1B_1C = 180^\circ$. Значит,

$$\angle AB_1C_1 = \angle C_1BC = \angle ABC.$$

Следовательно, треугольники ABC и AB_1C_1 подобны по двум углам.



б) Площадь треугольника AB_1C_1 в восемь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1, поэтому площадь треугольника ABC в девять раз больше площади треугольника AB_1C_1 и коэффициент подобия этих треугольников равен 3. Отсюда следует, что $BC = 3B_1C_1 = 18$.

Пусть $AB_1 = x$, тогда $AB = 3x$. Найдём BB_1 по теореме косинусов:

$$BB_1^2 = x^2 + 9x^2 - 6x \cdot x \cdot \cos 45^\circ = x^2\left(10 - 3\sqrt{2}\right).$$

Следовательно,

$$BB_1 = x\sqrt{10 - 3\sqrt{2}}.$$

Теперь по теореме синусов из треугольника ABB_1 получаем

$$\frac{AB}{\sin\angle AB_1B} = \frac{BB_1}{\sin\angle A}; \qquad \sin\angle AB_1B = \frac{AB}{BB_1}\sin\angle A.$$

Но $\sin\angle AB_1B = \sin\angle BB_1C$, поскольку синусы смежных углов равны.

Получаем

$$\sin\angle BB_1C = \frac{AB}{BB_1}\sin\angle A = \frac{3x}{x\sqrt{10 - 3\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{10 - 3\sqrt{2}}}.$$

Теперь находим радиус окружности, описанной около треугольника BB_1C:

$$2R = \frac{BC}{\sin \angle BB_1C} = 6\sqrt{20-6\sqrt{2}}; \quad R = 3\sqrt{20-6\sqrt{2}}.$$

Ответ: б) 18; $3\sqrt{20-6\sqrt{2}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По бизнес-плану четырёхлетний проект предполагает начальное вложение 12 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в конце первого и второго года, а также целое число m млн рублей в конце третьего и четвёртого года. Найдите наименьшее значение n, при котором первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, и наименьшее такое значение m, что при найденном ранее значении n первоначальные вложения за четыре года как минимум утроятся.

Решение.

К началу второго года получится $1{,}15 \cdot 12 + n$, а к началу третьего года — $1{,}15 \cdot 1{,}15 \cdot 12 + 2{,}15n$ млн вложений.

По условию $15{,}87 + 2{,}15n \geq 24$. Наименьшее целое решение этого неравенства — $n = 4$.

При найденном значении n к началу 4-го года имеем $1{,}15 \cdot 24{,}47 + m$ млн вложений, а в конце проекта — $1{,}15 \cdot 1{,}15 \cdot 24{,}47 + 2{,}15m = 1{,}3225 \cdot 24{,}47 + 2{,}15m$.

Из условия следует, что $1{,}3225 \cdot 24{,}47 + 2{,}15m > 36$, то есть

$$32{,}361575 + 2{,}15m > 36;$$

значит, $2{,}15m > 3{,}638425$; $m > \dfrac{3{,}638425}{2{,}15}$.

Наименьшее целое решение этого неравенства $- m = 2$.

Ответ: 4 и 2 млн руб.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено или имеется верный ответ без обоснования	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $y=\frac{5a-15x+ax}{x^2-2ax+a^2+25}$ содержит отрезок [0;1].

<u>**Решение.**</u>

Запишем функцию в виде $y=\frac{5a-(15-a)x}{(x-a)^2+25}$. Если при некоторых значениях a существуют такие числа x_0, x_1, что выполняются равенства $0=\frac{5a-(15-a)x_0}{(x_0-a)^2+25}$ и $1=\frac{5a-(15-a)x_1}{(x_1-a)^2+25}$, то отрезок [0; 1] будет принадлежать множеству значений данной функции.

Первое уравнение: $0=\frac{5a-(15-a)x}{(x-a)^2+25}$; $(15-a)x=5a$. Уравнение имеет решение при любом $a\neq 15$.

Второе уравнение: $1=\frac{5a-(15-a)x}{(x-a)^2+25}$; $x^2+3(5-a)x+a^2-5a+25=0$.

Уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен: $D=9(5-a)^2-4(a^2-5a+25)\geq 0$; $5(a^2-14a+25)\geq 0$; $\left(a-7+2\sqrt{6}\right)\left(a-7-2\sqrt{6}\right)\geq 0$. Решение этого неравенства: $\left(-\infty;\ 7-2\sqrt{6}\right]$, $\left[7+2\sqrt{6};+\infty\right)$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют все значения a, принадлежащие множеству $\left(-\infty;\ 7-2\sqrt{6}\right]$, $\left[7+2\sqrt{6};15\right)$, $(15;+\infty)$, и только они.

Ответ: $\left(-\infty;\ 7-2\sqrt{6}\right]$, $\left[7+2\sqrt{6};15\right)$, $(15;+\infty)$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Будем называть четырёхзначное число *интересным*, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 3111.

а) Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна 221.

б) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, разность между которыми равна 2001?

в) Найдите наименьшее нечётное число, для которого не существует кратного ему интересного четырёхзначного числа.

<u>Решение.</u>

а) Примером таких чисел являются числа 2916 и 3137.

б) Предположим, что такие числа существуют. Рассмотрим какие-либо два таких интересных числа. Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись большего из них, $\overline{pqrs}$ — десятичная запись меньшего из них, а k — та из цифр a, b, c и d, которая равна сумме трёх других. Тогда сумма цифр этого числа равна $2k$, то есть чётна. Аналогично получаем, что сумма цифр меньшего из рассматриваемых интересных чисел также чётна. Так как $d \neq 0$, следует, что $s \neq 9$, откуда получаем, что $d = s+1$, $c = r$, $b = q$.

Так как оба числа четырёхзначные, $a = p+2$, значит, числа $a+b+c+d$ и $p+q+r+s$ разной чётности. Приходим к противоречию.

в) Покажем, что искомое число равно 11. Для этого сначала приведём пример интересного четырёхзначного числа, кратного 3, 5, 7 и 9, — это число 9135.

Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись какого-либо интересного числа, кратного 11. Тогда $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = 11(91a + 9b + c) + (b - a + d - c)$.

Получаем, что число $b - a + d - c$ кратно 11. Поскольку a, b, c и d — цифры, отсюда следует, что либо $b + d = a + c$, либо эти две суммы отличаются на 11. Составим две пары цифр: a и c, b и d. Пусть k — та из цифр a, b, c и d, которая равна сумме трёх других, l — та из них, которая в паре с k. Пусть также m и n — две оставшиеся из цифр a, b, c и d. Поскольку $k = l + m + n$, имеем $k + l > m + n$. Значит, $k + l = m + n + 11$. Вычитая из этого равенства равенство $k = l + m + n$, получаем $l = 11 - l$, и, следовательно, $2l = 11$. Пришли к противоречию. Значит, не существует интересных четырёхзначных чисел, кратных 11.

Ответ: а) 2916 и 3137; б) нет; в) 11.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в пункте *а*, – обоснованное решение в пункте *б*, – искомая оценка в пункте *в*, – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 2

13 а) Решите уравнение $\left(1-3\operatorname{tg}^2 x\right)\sqrt{7\sin x}=0$.

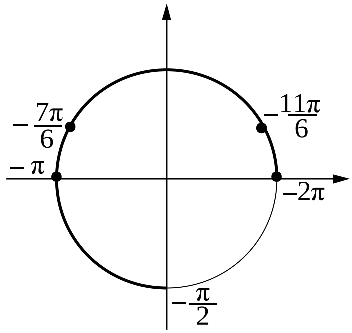
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

1) Если $\sin x=0$, то $x=\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

2) Если $\sin x\neq 0$, то $\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{3},\\ \sin x>0,\end{cases}$ $\begin{cases}\operatorname{tg}x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\\ \sin x>0,\end{cases}$

откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.



б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности.

Получаем $-2\pi;-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$; $-\pi$.

Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т. п.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; πn, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-2\pi;-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$; $-\pi$.

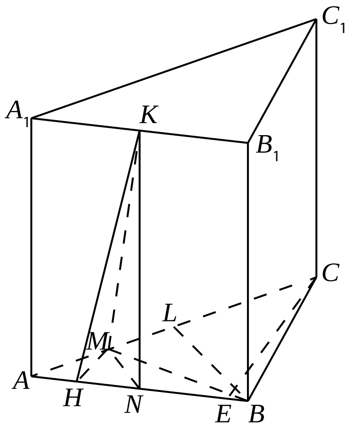
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB=BC$) треугольник ABC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC=1:3$.

а) Докажите, что $KM\perp AC$.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB=6$, $AC=8$ и $AA_1=3$.

Решение.



а) Пусть N — середина ребра AB, L — середина ребра AC. Угол AMN прямой, поскольку отрезок MN параллелен отрезку BL. Имеем $NM \perp AC$, плоскость KNM перпендикулярна прямой AC, следовательно, $KM \perp AC$.

б) Пусть MH — высота в треугольнике AMB, CE — высота в треугольнике ABC. $MH : CE = 1:4$. Имеем $MH \perp AB$ и $MH \perp BB_1$, следовательно, $MH \perp ABB_1$, угол HKM искомый. Вычисляя двумя способами площадь треугольника ABC, получим $CE \cdot AB = BL \cdot AC$, откуда

$$MH = \frac{CE}{4} = \frac{BL \cdot AC}{4 \cdot AB} = \frac{8\sqrt{6^2 - 4^2}}{4 \cdot 6} = \frac{2\sqrt{5}}{3},$$

$$KM = \sqrt{MN^2 + KN^2} = \sqrt{\frac{BL}{4}^2 + KN^2} = \sqrt{5 + 3^2} = \sqrt{14},$$ поэтому

$$\sin\angle HKM = \frac{MH}{KM} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{14}}.$$

Ответ: б) $\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{14}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{10^x-25\cdot 2^x-2\cdot 5^x+50}{5x-x^2-4}\ge 0.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{10^x-25\cdot 2^x-2\cdot 5^x+50}{5x-x^2-4}\ge 0;$$

$$\frac{\left(2^x-2\right)\left(5^x-25\right)}{(x-4)(1-x)}\ge 0;$$

$$\begin{cases}\dfrac{5^x-25}{x-4}\le 0,\\ x\ne 1;\end{cases}$$

$2\le x<4$.

Ответ: $x\in[2;4)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.

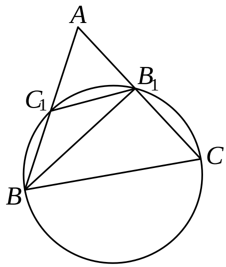
б) Вычислите длину стороны BC и радиус данной окружности, если $\angle A=135^\circ$, $B_1C_1=10$ и площадь треугольника AB_1C_1 в семь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

Решение.

а) Заметим, что $\angle AB_1C_1 + \angle C_1B_1C = 180°$. Четырёхугольник BCB_1C_1 вписан в окружность, поэтому $\angle C_1BC + \angle C_1B_1C = 180°$. Значит,

$$\angle AB_1C_1 = \angle C_1BC = \angle ABC.$$

Следовательно, треугольники ABC и AB_1C_1 подобны по двум углам.



б) Площадь треугольника AB_1C_1 в семь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1, поэтому площадь треугольника ABC в восемь раз больше площади треугольника AB_1C_1 и коэффициент подобия этих треугольников равен $2\sqrt{2}$. Отсюда следует, что $BC = 2\sqrt{2}B_1C_1 = 20\sqrt{2}$.

Пусть $AB_1 = x$, тогда $AB = 2\sqrt{2}x$. Найдём BB_1 по теореме косинусов:

$$BB_1^2 = x^2 + 8x^2 - 4\sqrt{2}x \cdot x \cdot \cos 135° = 13x^2.$$

Следовательно, $BB_1 = x\sqrt{13}$.

Теперь по теореме синусов из треугольника ABB_1 получаем

$$\frac{AB}{\sin\angle AB_1B} = \frac{BB_1}{\sin\angle A}; \quad \sin\angle AB_1B = \frac{AB}{BB_1}\sin\angle A.$$

Но $\sin\angle AB_1B = \sin\angle BB_1C$, поскольку синусы смежных углов равны.

Получаем

$$\sin\angle BB_1C = \frac{AB}{BB_1}\sin\angle A = \frac{2\sqrt{2}x}{x\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Теперь находим радиус окружности, описанной около треугольника BCB_1:

$$2R = \frac{BC}{\sin\angle BB_1C} = 10\sqrt{26}; \quad R = 5\sqrt{26}.$$

Ответ: б) $20\sqrt{2}$; $5\sqrt{26}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По бизнес-плану четырёхлетний проект предполагает начальное вложение 25 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 12 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в конце первого и второго года, а также целое число m млн рублей в конце третьего и четвёртого года. Найдите наименьшее значение n, при котором первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, и наименьшее такое значение m, что при найденном ранее значении n первоначальные вложения за четыре года как минимум утроятся.

Решение.

К началу второго года получится $1{,}12\cdot 25+n$ млн вложений, а к началу третьего — $1{,}12\cdot 1{,}12\cdot 25+2{,}12n$. По условию $1{,}2544\cdot 25+2{,}12n>50$, то есть $31{,}36+2{,}12n>50$. Наименьшее целое решение этого неравенства — $n=9$.

При найденном значении n к началу четвёртого года получится $1{,}12\cdot 50{,}44+m$ млн вложений, а к концу проекта —

$$1{,}12\cdot 1{,}12\cdot 50{,}44+2{,}12m=1{,}2544\cdot 50{,}44+2{,}12m;$$

Из условия следует, что:

$$1{,}2544\cdot 50{,}44+2{,}12m>75,$$

то есть

$$63{,}271936+2{,}12m>75.$$

Значит, $2{,}12m>11{,}728064$; $m>\dfrac{11{,}728064}{2{,}12}$.

Наименьшее целое решение этого неравенства — $m=6$.

Ответ: 9 и 6 млн руб.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено или имеется верный ответ без обоснования	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $y=\dfrac{5a+150x-10ax}{100x^2+20ax+a^2+25}$ содержит отрезок [0;1].

Решение.

Запишем функцию в виде $y=\dfrac{5a+10(15-a)x}{(10x+a)^2+25}$. Если при некоторых значениях a существуют такие числа x_0, x_1, что выполняются равенства $0=\dfrac{5a+10(15-a)x_0}{(10x_0+a)^2+25}$ и $1=\dfrac{5a+10(15-a)x_1}{(10x_1+a)^2+25}$, то отрезок [0; 1] будет принадлежать множеству значений данной функции.

Первое уравнение: $0=\dfrac{5a+10(15-a)x}{(10x+a)^2+25}$; $10(a-15)x=5a$. Уравнение имеет решение при любом $a\neq 15$.

Второе уравнение: $1=\dfrac{5a+10(15-a)x}{(10x+a)^2+25}$; $100x^2+30(a-5)x+a^2-5a+25=0$.

Уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен:

$$D=900(a-5)^2-400(a^2-5a+25)\geq 0;\ 500(a^2-14a+25)\geq 0;$$

$$\left(a-7+2\sqrt{6}\right)\left(a-7-2\sqrt{6}\right)\geq 0.$$

Решением этого неравенства является множество $\left(-\infty;\ 7-2\sqrt{6}\right]$, $\left[7+2\sqrt{6};+\infty\right)$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют значения $a\in\left(-\infty;\ 7-2\sqrt{6}\right]\cup\left[7+2\sqrt{6};15\right)\cup(15;+\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty;\ 7-2\sqrt{6}\right]$, $\left[7+2\sqrt{6};15\right)$, $(15;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Будем называть четырёхзначное число *интересным*, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 3111.

а) Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна 17.

б) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, разность между которыми равна 109?

в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему интересного четырёхзначного числа.

<u>Решение.</u>

а) Примером таких чисел являются числа 4228 и 4211.

б) Предположим, что такие числа существуют. Рассмотрим какие-либо два таких интересных числа. Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись большего из них, $\overline{pqrs}$ — десятичная запись меньшего из них, а k — та из цифр $a,\ b,\ c$ и d, которая равна сумме трёх других. Тогда сумма цифр этого числа равна $2k$, то есть чётна. Аналогично получаем, что сумма цифр меньшего из рассматриваемых интересных чисел также чётна. Так как $s \neq 0$, получаем, что $d \neq 9$, откуда получаем $d = s-1$, $c = r+1$. Так как $b \neq 0$, имеем $q \neq 9$, поэтому $b = q+1$, $a = p$.

Таким образом, числа $a+b+c+d$ и $p+q+r+s$ разной чётности. Приходим к противоречию.

в) Покажем, что искомое число равно 11. Для этого сначала приведём пример интересного четырёхзначного числа, кратного 2, — это число 1124, и числа, кратного 3, 5, и 7, — это число 9135.

Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись какого-либо интересного числа, кратного 11. Тогда $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = 11(91a + 9b + c) + (b - a + d - c)$.

Получаем, что число $b - a + d - c$ кратно 11. Поскольку a, b, c и d — цифры, отсюда следует, что либо $b + d = a + c$, либо эти две суммы отличаются на 11. Составим две пары цифр: a и c, b и d. Пусть k — та из цифр $a,\ b,\ c$ и d, которая равна сумме трёх других, l — та из них, которая в паре с k. Пусть также m и n — две оставшиеся из цифр $a,\ b,\ c$ и d. Поскольку $k = l + m + n$, имеем $k + l > m + n$. Значит, $k + l = m + n + 11$. Вычитая из этого равенства равенство $k = l + m + n$, получаем $l = 11 - l$, и, следовательно, $2l = 11$. Пришли к противоречию. Значит, не существует интересных четырёхзначных чисел, кратных 11.

Ответ: а) 4228 и 4211; б) нет; в) 11.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в пункте *а*, – обоснованное решение в пункте *б*, – искомая оценка в пункте *в*, – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $\frac{5\cos x+3}{5\sin x-4}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0;2\pi]$.

Решение.

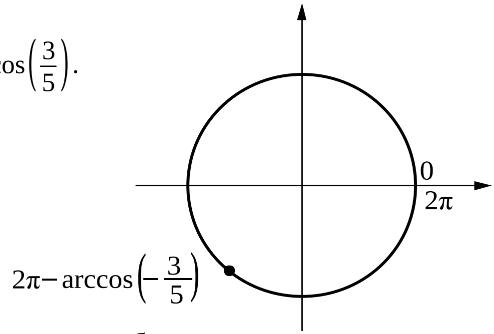
а) Имеем

$$\frac{5\cos x+3}{5\sin x-4}=0;\quad \begin{cases}\cos x=-\frac{3}{5},\\ \sin x\neq\frac{4}{5},\end{cases}$$

откуда $x=-\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ или $x=\pi+\arccos\left(\frac{3}{5}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $[0;2\pi]$, отберём с помощью единичной окружности.

Получаем $2\pi-\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)=\pi+\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.



Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т. п.

Ответ: а) $\pi+\arccos\left(\frac{3}{5}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\pi+\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

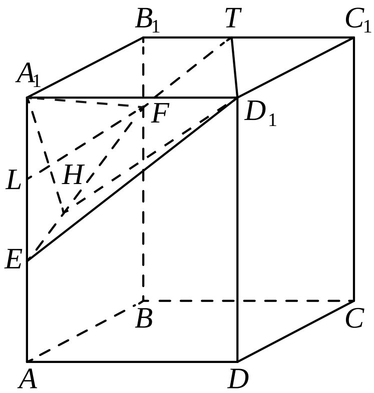
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=2:5$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F:FB=1:6$, а точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=5$, $AD=6$, $AA_1=14$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1.

<u>Решение.</u>



а) Плоскость EFT пересекает грани BB_1C_1C и AA_1D_1D по параллельным отрезкам. Имеем $TB_1=3$, $B_1F=\frac{1}{7}\cdot 14=2$, $A_1E=\frac{2}{7}\cdot 14=4$ и $A_1D_1=6$. Значит, треугольники D_1A_1E и TB_1F подобны, причём прямые D_1A_1 и B_1T параллельны, прямые A_1E и B_1F тоже параллельны. Значит, прямая ED_1 лежит в плоскости EFT.

б) Опустим перпендикуляр A_1H из точки A_1 на прямую EF пересечения этих плоскостей. Так как прямая A_1D_1 перпендикулярна плоскости AA_1B_1, угол A_1HD_1 будет искомым. Найдём A_1H. Для этого проведём в трапеции EA_1B_1F высоту $FL=5$ (L — середина EA_1). Вычисляя двумя способами площадь треугольника EFA_1, найдём $A_1H\cdot EF=A_1E\cdot FL$, то есть $A_1H=\frac{FL\cdot A_1E}{FE}=\frac{5\cdot 4}{\sqrt{5^2+2^2}}=\frac{20}{\sqrt{29}}$. Тогда тангенс искомого угла равен $6:\frac{20}{\sqrt{29}}=\frac{6\sqrt{29}}{20}=\frac{3\sqrt{29}}{10}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{29}}{10}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{x^4-2x^3+x^2}{x^2+x-2}-\frac{2x^3+x^2+x-1}{x+2}\le 1.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x^4-2x^3+x^2}{x^2+x-2}-\frac{2x^3+x^2+x-1}{x+2}\le 1;$$

$$\frac{x^2(x-1)^2}{(x+2)(x-1)}-\frac{2x^3+x^2+2x+1}{x+2}\le 0;$$

$$\begin{cases}\dfrac{-x^3-2x^2-2x-1}{x+2}\le 0,\\ x\ne 1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x+1)(x^2+x+1)}{x+2}\ge 0,\\ x\ne 1;\end{cases}$$

$x\in(-\infty;-2)$, $[-1;1)$, $(1;+\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty;-2)$, $[-1;1)$, $(1;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точки P, Q, W делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AP:PB=CQ:QB=CW:WD=1:4$, радиус окружности, описанной около треугольника PQW, равен 10, $PQ=16$, $QW=12$, угол PWQ острый.

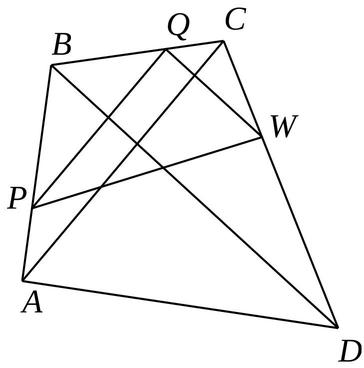
а) Докажите, что треугольник PQW прямоугольный.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

Решение.

а) Треугольники ABC и PBQ подобны с коэффициентом подобия

$$k=AB:PB=CB:QB=5:4.$$



Отсюда следует, что PQ и AC параллельны и $AC = k \cdot PQ = \frac{5}{4} \cdot 16 = 20$. Аналогично QW и BD параллельны и $BD = 60$. Угол между прямыми AC и BD равен углу между прямыми PQ и QW. По теореме синусов в треугольнике PQW имеем $2R = \frac{PQ}{\sin \angle QWP} = \frac{QW}{\sin \angle QPW}$, следовательно, $20 = \frac{16}{\sin \angle QWP} = \frac{12}{\sin \angle QPW}$.

Отсюда $\sin^2 \angle QWP + \sin^2 \angle QPW = \frac{256}{400} + \frac{144}{400} = 1$.

Следовательно, $\sin^2 \angle QPW = \cos^2 \angle QWP$, откуда, учитывая, что угол W острый, находим, что $\sin \angle QPW = \cos \angle QWP$, и, значит, $\angle QPW + \angle QWP = \frac{\pi}{2}$, то есть $\angle PQW = \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что треугольник PQW прямоугольный.

б) Угол между диагоналями четырёхугольника $ABCD$ прямой. Поэтому его площадь равна $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 60 = 600$.

Ответ: б) 600.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 8 % в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Решение.

Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 10 %,т. е. увеличивается в 1,1 раза. Поэтому через три года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1{,}1^3 S = 1{,}331S .$$

Аналогично сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1{,}08\left(1+\frac{n}{100}\right)^2 S ,$$

где n — некоторое натуральное число процентов.

По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1{,}08\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)^2 S > 1{,}331S,$$

$$\left(1+\frac{n}{100}\right)^2 > \frac{1331}{1080} = 1{,}2324...$$

При $n=12$ неравенство

$$1{,}12^2>1{,}2324...;\quad 1{,}2544>1{,}2324...$$

верно, а при $n=11$ неравенство

$$1{,}11^2>1{,}2324...;\quad 1{,}2321>1{,}2324...$$

неверно, как и при всех меньших n.

Ответ: 12.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено или имеется верный ответ без обоснования	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+a)^2}=\left|a\sqrt{2}\right|,\\ x^2+y^2\le 8\end{cases}$$

имеет единственное решение.

<u>Решение.</u>

Уравнение

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+a)^2}=\left|a\sqrt{2}\right|$$

означает, что сумма расстояний от точки $(x;y)$ до точек $(a;0)$ и $(0;-a)$ равна $\left|a\sqrt{2}\right|$, но эта сумма расстояний всегда больше, чем $\left|a\sqrt{2}\right|$, если только точка $(x;y)$ не лежит на отрезке с концами $(a;0)$ и $(0;-a)$. Значит, множество решений при $a\ne 0$ — это отрезок с концами $(a;0)$ и $(0;-a)$. При $a=0$ множество решений — это $x=0$, $y=0$.

Множество решений неравенства $x^2+y^2\le 8$ — круг на плоскости с координатами $(x;y)$ с центром в начале координат и радиусом $2\sqrt{2}$. Отсюда получаем необходимое условие существования единственного решения — отрезок с концами $(a;0)$ и $(0;-a)$ должен пересекаться с данным кругом по единственной точке. Это возможно при $a=0$ (когда отрезок превращается в точку), а также когда отрезок касается границы круга. Из симметрии точка касания лежит в середине этого отрезка. Расстояние от середины отрезка до начала координат равно $\frac{\sqrt{2}|a|}{2}$. В случае касания это расстояние должно совпадать с радиусом круга, откуда получаем уравнение $2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}|a|}{2}$, $|a|=4$, $a=\pm 4$. Таким образом, система имеет единственное решение при $a=0$, $a=4$ и $a=-4$.

Ответ: $a=0$; $a=4$; $a=-4$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, но не включена точка $a=0$	3
С помощью верного рассуждения получено одно значение a	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения отрезка и круга (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Будем называть четырёхзначное число *очень счастливым*, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140.

а) Существуют ли одиннадцать последовательных четырёхзначных чисел, среди которых ровно два очень счастливых?

б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2017?

в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.

Решение.

а) Примером таких чисел являются 5023, 5024, …, 5033. Очень счастливыми среди них являются числа 5023 и 5032.

б) Предположим, что это возможно. Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись меньшего из этих двух очень счастливых чисел, а $\overline{klmn}$ — десятичная запись большего из них. Из условия следует, что либо $10c+d+17=10m+n$, либо $10c+d+17=100+10m+n$. Отсюда получаем, что либо $(m+n)-(c+d)=9(c-m+1)+8$, либо $(m+n)-(c+d)=9(c-m-10)+7$. Значит, число $(m+n)-(c+d)$ даёт при делении на 9 или остаток 8, или остаток 7.

Также из условия следует, что либо $1000a+100b+2000=1000k+100l$, либо $1000a+100b+2100=1000k+100l$. Отсюда получаем, что либо $(k+l)-(a+b)=9(a-k+2)+2$, либо $(k+l)-(a+b)=9(a-k+2)+3$. Значит, число $(k+l)-(a+b)$ даёт при делении на 9 или остаток 2, или остаток 3.

Приходим к противоречию, так как по условию

$$(k+l)-(a+b)=(m+n)-(c+d).$$

в) Покажем, что искомое число равно 11. Для этого сначала приведём пример очень счастливого четырёхзначного числа, кратного 2, 3, 5 и 7. Число 1890 кратно 2, 5, 3 и 7.

Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись какого-либо очень счастливого числа, кратного 11. Тогда

$$\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d=11(91a+9b+c)+(b-a+d-c).$$

Получаем, что число $b-a+d-c$ кратно 11. Поскольку a, b, c и d — цифры, отсюда следует, что либо $b-a+d-c=0$, либо $b-a+d-c=11$, либо $b-a+d-c=-11$.

В первом случае имеем $a+b=c+d$ и $a+c=b+d$. Вычитая эти равенства, получаем $b-c=c-b$, т. е. $b=c$, — противоречие. Во втором случае имеем $a+b=c+d$ и $a+c+11=b+d$. Вычитая эти равенства, получаем $b-c-11=c-b$, т. е. $2(b-c)=11$, — тоже противоречие, так как 11 не кратно 2. Аналогичное противоречие получается и в третьем случае. Значит, не существует очень счастливых четырёхзначных чисел, кратных 11.

Ответ: а) да, например, 5023, 5024, …, 5033; б) нет; в) 11.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в пункте *а*, – обоснованное решение в пункте *б*, – искомая оценка в пункте *в*, – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 4

13

а) Решите уравнение $\dfrac{5\sin x-3}{5\cos x-4}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

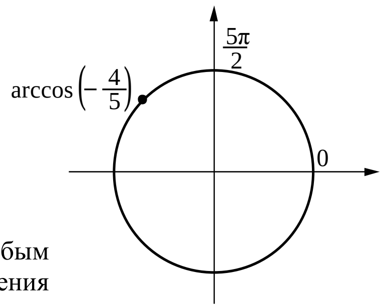
<u>Решение.</u>

а) Имеем

$$\frac{5\sin x-3}{5\cos x-4}=0;\quad \begin{cases}\sin x=\dfrac{3}{5},\\ \cos x\neq\dfrac{4}{5},\end{cases}$$

откуда $x=\pi-\arcsin\left(\dfrac{3}{5}\right)+2\pi n=\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т. п.

Получаем $x=\pi-\arcsin\left(\dfrac{3}{5}\right)=\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)$.

Ответ: а) $x=\pi-\arcsin\left(\dfrac{3}{5}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\pi-\arcsin\left(\dfrac{3}{5}\right)$.

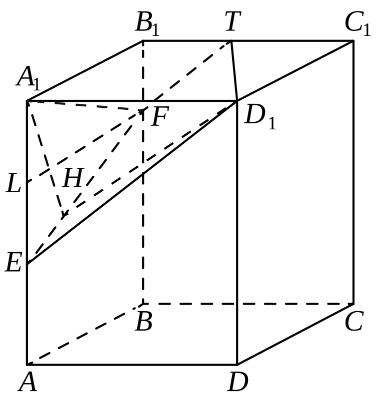
Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=1:2$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F:FB=1:5$, а точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=2$, $AD=6$, $AA_1=6$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1.

Решение.



а) Плоскость EFT пересекает грани BB_1C_1C и AA_1D_1D по параллельным отрезкам. Имеем $TB_1=3$, $B_1F=\frac{1}{6}\cdot 6=1$, $A_1E=\frac{1}{3}\cdot 6=2$ и $A_1D_1=6$. Значит, треугольники D_1A_1E и TB_1F подобны, причём прямые D_1A_1 и B_1T параллельны, прямые A_1E и B_1F тоже параллельны. Значит, точка D_1 лежит в плоскости EFT.

б) Так как прямая A_1D_1 перпендикулярна плоскости AA_1B_1, опустим перпендикуляр A_1H из точки A_1 на прямую EF пересечения этих плоскостей. Угол A_1HD_1 будет искомым. Найдём A_1H. Для этого проведём в трапеции EA_1B_1F высоту $FL=2$ (L — середина EA_1). Вычисляя двумя способами площадь треугольника EFA_1, найдём $A_1H\cdot EF=A_1E\cdot FL$, то есть $A_1H=\frac{FL\cdot A_1E}{FE}=\frac{2\cdot 2}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$. Тогда тангенс искомого угла равен $6:\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{4}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{4x^4-4x^3+x^2}{-2x^2+5x-2}+\frac{2x^3-7x^2+5x+1}{x-2}\le 0.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{4x^4-4x^3+x^2}{-2x^2+5x-2}+\frac{2x^3-7x^2+5x+1}{x-2}\le 0;$$

$$\frac{x^2(2x-1)^2}{(2x-1)(2-x)}+\frac{2x^3-7x^2+5x+1}{x-2}\le 0;$$

$$\begin{cases}\dfrac{-6x^2+5x+1}{x-2}\le 0,\\ x\ne\dfrac{1}{2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{(6x+1)(x-1)}{x-2}\ge 0,\\ x\ne\dfrac{1}{2};\end{cases}$$

$$x\in\left[-\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2};1\right],\ (2;+\infty).$$

Ответ: $x\in\left[-\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2};1\right],\ (2;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точки P, Q, W делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AP:PB=CQ:QB=CW:WD=3:4$, радиус окружности, описанной около треугольника PQW, равен 10, $PQ=16$, $QW=12$, угол PWQ острый.

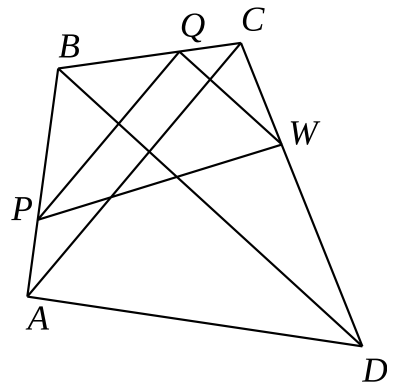
а) Докажите, что треугольник PQW прямоугольный.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

Решение.

а) Треугольники ABC и PBQ подобны с коэффициентом подобия

$$k = AB : PB = CB : QB = 7:4.$$



Отсюда следует, что PQ и AC параллельны и $AC = k \cdot PQ = \frac{7}{4} \cdot 16 = 28$. Аналогично QW и BD параллельны, и $BD = 28$. Угол между прямыми AC и BD равен углу между прямыми PQ и QW. По теореме синусов в треугольнике PQW имеем

$$2R = \frac{PQ}{\sin\angle QWP} = \frac{QW}{\sin\angle QPW}, \text{ следовательно,}$$

$$20 = \frac{16}{\sin\angle QWP} = \frac{12}{\sin\angle QPW}.$$

Отсюда

$$\sin^2\angle QWP + \sin^2\angle QPW = \frac{256}{400} + \frac{144}{400} = 1.$$

Следовательно,

$$\sin^2\angle QPW = \cos^2\angle QWP,$$

откуда, учитывая, что угол W острый, находим, что

$$\sin\angle QPW = \cos\angle QWP,$$

и, значит, $\angle QPW + \angle QWP = \frac{\pi}{2}$, то есть $\angle PQW = \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что треугольник PQW прямоугольный.

б) Угол между диагоналями четырёхугольника $ABCD$ прямой. Поэтому его площадь равна $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 28 = 392$.

Ответ: б) 392.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 9 % в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Решение.

Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 10%, т. е. увеличивается в 1,1 раза. Поэтому через три года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1{,}1^3 S = 1{,}331S.$$

Аналогично сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1{,}09\left(1+\frac{n}{100}\right)^2 S,$$

где n — некоторое натуральное число процентов.

По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1{,}09\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)^2 S > 1{,}331S,$$

$$\left(1+\frac{n}{100}\right)^2 > \frac{1331}{1090} = 1{,}22\ldots$$

При $n = 11$ неравенство

$$1{,}11^2 > 1{,}22\ldots;\quad 1{,}2321 > 1{,}22\ldots$$

верно, а при $n = 10$ неравенство

$$1{,}1^2 > 1{,}22\ldots;\quad 1{,}21 > 1{,}22\ldots$$

неверно, как и при всех меньших n.

Ответ: 11.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено или имеется верный ответ без обоснования	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-a)^2}=\left|a\sqrt{2}\right|, \\ x^2+y^2\le 18 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Уравнение

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-a)^2}=\left|a\sqrt{2}\right|$$

означает, что сумма расстояний от точки $(x;y)$ до точек $(a;0)$ и $(0;a)$ равна $\left|a\sqrt{2}\right|$, но эта сумма расстояний всегда больше, чем $\left|a\sqrt{2}\right|$, если только точка $(x;y)$ не лежит на отрезке с концами $(a;0)$ и $(0;a)$. Значит, множество решений при $a\ne 0$ — это отрезок с концами $(a;0)$ и $(0;a)$. При $a=0$ множество решений — это $x=0$, $y=0$.

Множество решений неравенства $x^2+y^2\le 18$ — круг на плоскости с координатами $(x;y)$ с центром в начале координат и радиусом $3\sqrt{2}$. Отсюда получаем необходимое условие существования единственного решения — отрезок с концами $(a;0)$ и $(0;a)$ должен пересекаться с данным кругом по единственной точке. Это возможно при $a=0$ (когда отрезок превращается в точку), а также когда отрезок касается границы круга. Из симметрии точка касания лежит в середине этого отрезка. Расстояние от середины отрезка до начала координат равно $\frac{\sqrt{2}|a|}{2}$. В случае касания это расстояние должно совпадать с радиусом круга, откуда получаем уравнение $3\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}|a|}{2}$, $|a|=6$, $a=\pm 6$. Таким образом, система имеет единственное решение при $a=0$, $a=6$ и $a=-6$.

Ответ: $a=0$; $a=6$; $a=-6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, но не включена точка $a=0$	3
С помощью верного рассуждения получено одно значение a	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения отрезка и круга (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Будем называть четырёхзначное число *очень счастливым*, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140.

а) Существуют ли двадцать последовательных четырёхзначных чисел, среди которых нет ни одного очень счастливого числа?

б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2016?

в) Найдите наименьшее нечётное число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.

Решение.

а) Примером таких чисел являются 1235, 1236, …, 1254.

б) Предположим, что это возможно. Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись меньшего из этих двух очень счастливых чисел, а $\overline{klmn}$ — десятичная запись большего из них. Из условия следует, что либо $10c+d+16=10m+n$, либо $10c+d+16=100+10m+n$.

Отсюда получаем, что либо $(m+n)-(c+d)=9(c-m+1)+7$, либо $(m+n)-(c+d)=9(c-m-10)+6$.

Значит, число $(m+n)-(c+d)$ даёт при делении на 9 или остаток 7, или остаток 6.

Также из условия следует, что либо $1000a+100b+2000=1000k+100l$, либо $1000a+100b+2100=1000k+100l$. Отсюда получаем, что либо $(k+l)-(a+b)=9(a-k+2)+2$, либо $(k+l)-(a+b)=9(a-k+2)+3$. Значит, число $(k+l)-(a+b)$ даёт при делении на 9 или остаток 2, или остаток 3.

Приходим к противоречию, так как по условию

$$(k+l)-(a+b)=(m+n)-(c+d).$$

в) Покажем, что искомое число равно 11. Для этого сначала приведём примеры очень счастливых четырёхзначных чисел, кратных 3, 5, 7 и 9: число 1890 кратно 3, 5, 7 и 9.

Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись какого-либо очень счастливого числа, кратного 11.

Тогда

$$\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d=11(91a+9b+c)+(b-a+d-c).$$

Получаем, что число $b-a+d-c$ кратно 11. Поскольку a, b, c и d — цифры, отсюда следует, что либо $b-a+d-c=0$, либо $b-a+d-c=11$, либо $b-a+d-c=-11$.

В первом случае имеем $a+b=c+d$ и $a+c=b+d$. Вычитая эти равенства, получаем $b-c=c-b$, т. е. $b=c$, — противоречие. Во втором случае имеем $a+b=c+d$ и $a+c+11=b+d$. Вычитая эти равенства, получаем $b-c-11=c-b$, т. е. $2(b-c)=11$, — тоже противоречие, так как 11 не кратно 2. Аналогичное противоречие получается и в третьем случае. Значит, не существует очень счастливых четырёхзначных чисел, кратных 11.

Ответ: а) да , например, 1235, 1236, …, 1254; б) нет; в) 11.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в пункте *а*, – обоснованное решение в пункте *б*, – искомая оценка в пункте *в*, – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 5

13

а) Решите уравнение $\dfrac{2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x}{\log_4(\sin x)}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\,-\dfrac{3}{2}\pi\right]$.

Решение.

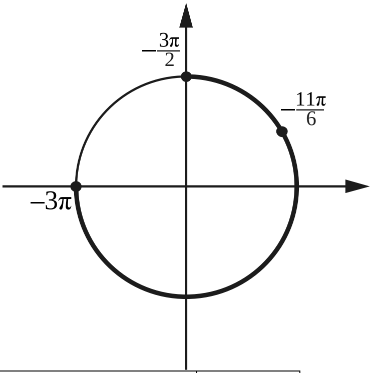
Перейдём к системе $\begin{cases}2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x=0;\\ \sin x\neq 1;\\ \sin x>0.\end{cases}$

Решаем уравнение системы $2\cos x\left(\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$.

Получаем $\left[\begin{array}{l}\cos x=0;\\ \cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0.\end{array}\right.$

С учётом всех ограничений $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\,-\dfrac{3}{2}\pi\right]$.



Получим число $-\dfrac{11\pi}{6}$.

Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т. п.

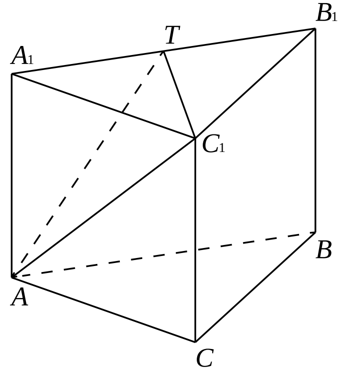
Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{11\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.



<u>Решение.</u>

а) Прямая C_1T перпендикулярна A_1B_1, поскольку C_1T — медиана равностороннего треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме того, прямая C_1T перпендикулярна AA_1, поскольку AA_1 перпендикулярна плоскости основания $A_1B_1C_1$. Значит, прямая C_1T перпендикулярна плоскости AA_1B_1, и потому C_1T перпендикулярна AT.

Следовательно, треугольник AC_1T прямоугольный.

б) Так как прямая C_1T перпендикулярна прямым A_1T и AT, угол A_1TA искомый. Имеем $\operatorname{tg}\angle A_1TA = \dfrac{AA_1}{A_1T} = \dfrac{3}{1} = 3.$

Ответ: б) $\operatorname{arctg} 3$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\dfrac{3^{2x} - 54\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2(x+1)} - 1}{x+3} \le 0$.

Решение.

Имеем

$$\frac{3^{2x}-54\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2(x+1)}-1}{x+3}\le 0;\qquad \frac{9^x-\frac{6}{9^x}-1}{x+3}\le 0;$$

$$\frac{9^{2x}-9^x-6}{(x+3)}\le 0;\qquad \frac{9^x-3}{x+3}\le 0.$$

Решая неравенство, находим $x\in(-3;0,5]$.

Ответ: $(-3;0,5]$.

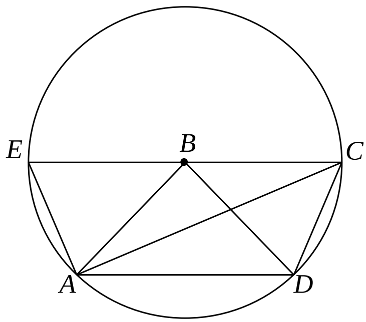
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.

а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD.

б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $AC=12$ и $BD=6,5$.

Решение.



а) $\angle BAC=\angle ACB=\angle CAD$, следовательно, AC — биссектриса угла BAD.

б) Поскольку $BA=BD=BC=6,5$, точки A, D и C лежат на окружности радиуса 6,5 с центром в точке B. Продолжим основание BC за точку B до пересечения с этой окружностью в точке E. Тогда EC — диаметр окружности, а $ADCE$ — равнобедренная трапеция. Поэтому $AE=CD$, а так как точка A лежит на окружности с диаметром CE, получаем, что $\angle CAE=90°$. Из прямоугольного треугольника CAE находим, что $AE=\sqrt{CE^2-AC^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$. Следовательно, $CD=AE=5$.

Ответ: б) 5.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект **целое** число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 миллионов рублей в первый и второй годы, а также по 10 миллионов в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 100 миллионов, а за четыре года станут больше 170 миллионов рублей.

Решение.

Пусть S миллионов рублей — первоначальные вложения. К началу 2-го года получится $1,2S+20$ миллионов рублей, а к началу 3-го года — $1,2(1,2S+20)+20=1,44S+44$. По условию $1,44S+44>100$, откуда $S>\frac{56}{1,44}\geq 38,8$.

К началу 4-го года имеем $1,2\left(1,44S+44\right)+10$, а в конце проекта

$$1,2\left(1,2\left(1,44S+44\right)+10\right)=2,0736S+63,36+12=2,0736S+75,36.$$

По условию $2,0736S+75,36>160$, откуда $S>\frac{84,64}{2,0736}>40,8$.

А значит, минимальное возможное целое число, удовлетворяющее условию $S=41$.

Ответ: 41 миллион руб.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено или имеется верный ответ без обоснования	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

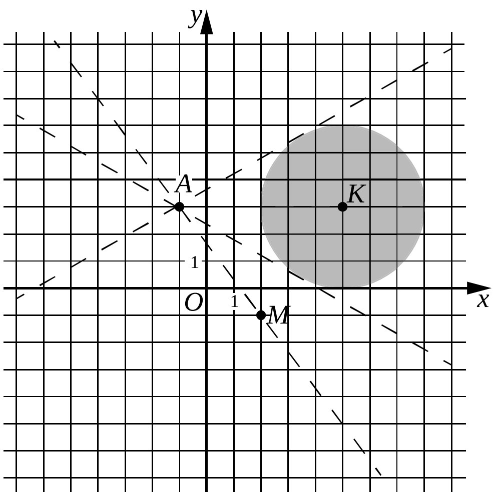
$$\begin{cases}\left(\left(x-5\right)^2+\left(y-3\right)^2-9\right)\left(\left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2\right)\le 0,\\ y=ax+a+3\end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.

Уравнение $y=ax+a+3$ задает прямую. Эта прямая при всех a проходит через точку $A\left(-1;3\right)$.

Неравенство системы $\left(\left(x-5\right)^2+\left(y-3\right)^2-9\right)\left(\left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2\right)\le 0$ задаёт объединение круга с центром в точке $K\left(5;3\right)$ и радиусом 3 и точки $M\left(2;-1\right)$. Система не будет иметь решений тогда и только тогда, когда прямая $y=ax+a+3$ не имеет общих точек с кругом и не проходит через точку M .



Расстояние между точками $A(-1;3)$ и $K(5;3)$ равно 6, а радиус круга равен 3, значит, касательные к кругу, проведённые из точки $A(-1;3)$, образуют углы $\frac{\pi}{6}$ с прямой AK. Этим касательным соответствуют значения $a=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Прямая AM имеет угловой коэффициент $-\frac{4}{3}$.

Отсюда получаем $a<-\frac{4}{3}$; $-\frac{4}{3}<a<-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $a>\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)$; $\left(-\frac{4}{3};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
Начато верное рассуждение и даже получено одно какое-нибудь значение параметра, но до конца задача не доведена	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и окружности (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ и $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{b_2}{a_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a_2}{b_2}$, если известно, что $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}}$ — различные натуральные числа?

Решение.

а) Подходящим примером являются прогрессии $1, 6, 11, 16, ...$ и $1, 2, 3, 4, ...$ соответственно. Для этих прогрессий имеем $\frac{a_1}{b_1}=1$, $\frac{a_2}{b_2}=3$ и $\frac{a_4}{b_4}=4$.

б) Предположим, что такие прогрессии существуют. Тогда одно из чисел $\frac{a_1}{b_1}$ или $\frac{b_2}{a_2}$ не меньше 1, а второе больше 1. Значит, либо $a_1 \geq b_1$ и $a_2 < b_2$, либо $a_1 > b_1$ и $a_2 \leq b_2$, и, следовательно, $a_2 - a_1 < b_2 - b_1$. Отсюда, используя свойства арифметической прогрессии, получаем

$$a_4 = a_2 + 2(a_2 - a_1) < b_2 + 2(b_2 - b_1) = b_4 \text{ и } \frac{a_4}{b_4} < 1.$$

Пришли к противоречию.

в) Обозначим через c и d разности арифметических прогрессий $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...$ и $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n,\ ...$ соответственно. Из условия следует, что числа c и d натуральные, а $\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}} - \frac{a_2}{b_2}$ целые и не равны нулю. Имеем

$$\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 + c}{b_1 + d} - \frac{a_1}{b_1} = \frac{cb_1 - da_1}{b_1(b_1 + d)} \text{ и}$$

$$\frac{a_{10}}{b_{10}} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + 9c}{b_1 + 9d} - \frac{a_1 + c}{b_1 + d} = \frac{8(cb_1 - da_1)}{(b_1 + d)(b_1 + 9d)}.$$

Знаменатели дробей $\frac{cb_1 - da_1}{b_1(b_1 + d)}$ и $\frac{8(cb_1 - da_1)}{(b_1 + d)(b_1 + 9d)}$ положительны, а числители этих дробей имеют одинаковый знак. Значит, числа $\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}} - \frac{a_2}{b_2}$ имеют одинаковый знак, то есть либо $1 \leq \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_{10}}{b_{10}}$, либо $1 \leq \frac{a_{10}}{b_{10}} < \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_1}{b_1}$. В обоих случаях получаем, что $\frac{a_2}{b_2} \geq 2$.

Если прогрессии $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...$ и $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n,\ ...$ являются прогрессиями $9, 32, ..., 216, ...$ и $9, 16, ..., 72, ...$ соответственно, то $\frac{a_1}{b_1} = 1$, $\frac{a_2}{b_2} = 2$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}} = 3$.

Этот пример показывает, что наименьшее возможное значение дроби $\frac{a_2}{b_2}$ равно 2.

Ответ: а) да, например, $1, 6, 11, 16, ...$ и $1, 2, 3, 4, ...$ соответственно; б) нет; в) 2.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в пункте *а*, – обоснованное решение в пункте *б*, – искомая оценка в пункте *в*, – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 6

13 а) Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x-\sin x}{\log_7(\cos x)}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\dfrac{7}{2}\pi\right]$.

Решение.

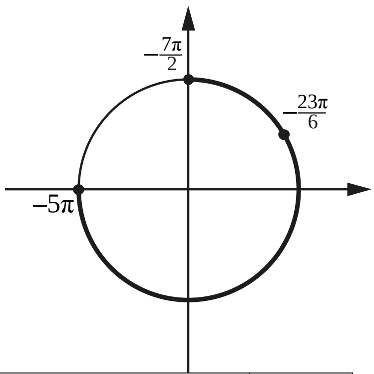
Перейдём к системе $\begin{cases}2\sin^2 x-\sin x=0;\\ \cos x\neq 1;\\ \cos x>0.\end{cases}$

Решаем уравнение системы $2\sin x\left(\sin x-\dfrac{1}{2}\right)=0$.

Получаем $\left[\begin{array}{l}\sin x=0;\\ \sin x-\dfrac{1}{2}=0.\end{array}\right.$

С учётом всех ограничений $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\dfrac{7}{2}\pi\right]$.



Получим число $-\dfrac{23\pi}{6}$.

Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т. п.

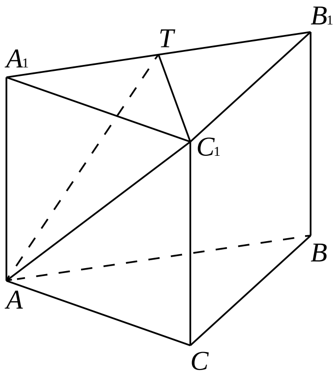
Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{23\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 3. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

Решение.



а) Прямая C_1T перпендикулярна A_1B_1, поскольку C_1T — медиана равностороннего треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме того, прямая C_1T перпендикулярна AA_1, поскольку AA_1 перпендикулярна плоскости основания $A_1B_1C_1$.

Значит, прямая C_1T перпендикулярна плоскости AA_1B_1, и потому C_1T перпендикулярна AT. Следовательно, треугольник AC_1T прямоугольный.

б) Так как прямая C_1T перпендикулярна прямым A_1T и AT, угол A_1TA искомый. Имеем $\operatorname{tg}\angle A_1TA = \frac{AA_1}{A_1T} = \frac{3}{2}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $\frac{5^{2x+1}-75\cdot 0{,}2^{2x}-10}{x+2}\le 0$.

Решение.

Имеем

$$\frac{5^{2x+1}-75\cdot 0{,}2^{2x}-10}{x+2}\le 0;\quad \frac{5\cdot 25^{x}-\frac{75}{25^{x}}-10}{x+2}\le 0;$$

$$\frac{25^{2x}-2\cdot 25^{x}-15}{25^{x}(x+2)}\le 0;\quad \frac{\left(25^{x}-5\right)\left(25^{x}+3\right)}{(x+2)}\le 0;\quad \frac{25^{x}-5}{x+2}\le 0.$$

Решая неравенство, находим $x\in(-2;0{,}5]$.

Ответ: $(-2;0{,}5]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

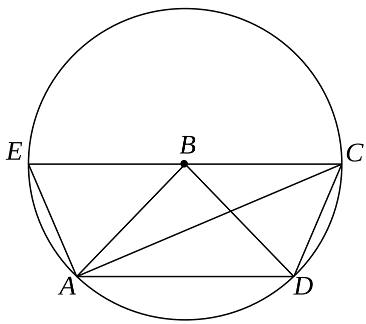
16

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.

а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD.

б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $AC=15$ и $BD=8{,}5$.

Решение.



а) $\angle BAC=\angle ACB=\angle CAD$, следовательно, AC — биссектриса угла BAD.

б) Поскольку $BA=BD=BC=8{,}5$, точки A, D и C лежат на окружности радиуса 8,5 с центром в точке B. Продолжим основание BC за точку B до пересечения с этой окружностью в точке E. Тогда EC — диаметр окружности, а $ADCE$ — равнобедренная трапеция. Поэтому $AE=CD$, а так как точка A лежит на окружности с диаметром CE, получаем, что $\angle CAE=90^\circ$. Из прямоугольного треугольника CAE находим, что $AE=\sqrt{CE^2-AC^2}=\sqrt{17^2-15^2}=8$. Следовательно, $CD=AE=8$.

Ответ: б) 8.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект **целое** число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 миллионов рублей в первый и второй годы, а также по 10 миллионов в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 125 миллионов, а за четыре года станут больше 200 миллионов рублей.

<u>**Решение.**</u>
Пусть S миллионов рублей — первоначальные вложения. К началу 2-го года получится $1,2S+20$ миллионов рублей, а к началу 3-го года — $1,2(1,2S+20)+20=1,44S+44$. По условию $1,44S+44>125$, откуда $S>\frac{81}{1,44}>56,25$.

К началу 4-го года имеем $1,2\left(1,44S+44\right)+10=1,728+62,8$ миллионов, а в конце проекта

$$1,2\left(1,2\left(1,44S+44\right)+10\right)=2,0736S+63,36+12=2,0736S+75,36.$$

По условию $2,0736S+75,36>190$, откуда $S>\frac{114,64}{2,0736}>55,2$.

А значит, минимальное возможное целое число, удовлетворяющее условию, $S=57$.
Ответ: 57 миллионов руб.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено или имеется верный ответ без обоснования	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

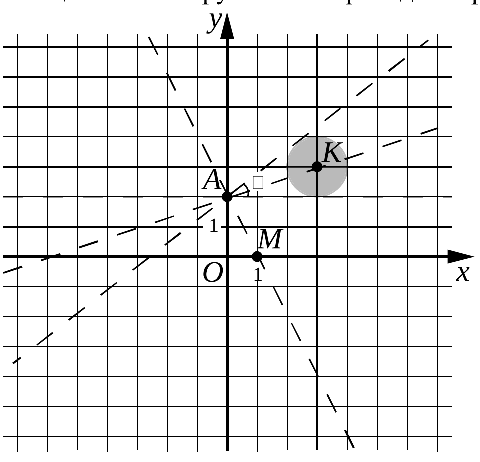
$$\begin{cases}\left(\left(x-3\right)^2+\left(y-3\right)^2-1\right)\left(\left(x-1\right)^2+y^2\right)\le 0,\\ y-2=ax\end{cases}$$

не имеет решений.

__**Решение.**__

Уравнение $y=ax+2$ задает прямую. Эта прямая при всех a проходит через точку $A(0;2)$.

Неравенство системы $\left(\left(x-3\right)^2+\left(y-3\right)^2-1\right)\left(\left(x-1\right)^2+y^2\right)\le 0$ задаёт объединение круга с центром в точке $K(3;3)$ и радиусом 1 и точки $M(1;0)$. Система не будет иметь решений тогда и только тогда, когда прямая $y=ax+2$ не имеет общих точек с кругом и не проходит через точку M .



Пусть α – угол между касательными к окружности $(x-3)^2+(y-3)^2=1$, проведёнными из точки A(0; 2). Тогда тангенс угла $\frac{\alpha}{2}$, образованного этими касательными с прямой с прямой AK, равен $\frac{1}{3}$ (см. рис.). Воспользовавшись формулой тангенса двойного угла, получим $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{3}{4}$. Значит, для касательных к окружности $a=0$ и $a=\dfrac{3}{4}$.

Прямая AM имеет угловой коэффициент $a=-2$.

Отсюда получаем ответ: $a<-2;\ -2<a<0;\ a>\dfrac{3}{4}$.

Ответ: $(-\infty;-2);\ (-2;0);\ \left(\dfrac{3}{4};+\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
Начато верное рассуждение и даже получено одно какое-нибудь значение параметра, но до конца задача не доведена	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и окружности (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + a_3b_3 = 3a_2b_2$?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3, если $a_1b_1 + 2a_4b_4 \le 300$?

Решение.

а) Подходящим примером являются прогрессии 1, 3, 5, ... и 1, 4, 7, ... Для этих прогрессий имеем $a_1b_1 + a_3b_3 = 1\cdot1 + 5\cdot7 = 36 = 3\cdot3\cdot4 = 3a_2b_2$.

б) Обозначим через c и d разности арифметических прогрессий $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ соответственно. Тогда

$$a_1b_1 + 2a_4b_4 = a_1b_1 + 2(a_1+3c)(b_1+3d) = 3a_1b_1 + 6a_1d + 6b_1c + 18cd,$$

$$3a_3b_3 = 3(a_1+2c)(b_1+2d) = 3a_1b_1 + 6a_1d + 6b_1c + 12cd$$

и $a_1b_1 + 2a_4b_4 - 3a_3b_3 = 6cd$.

Если $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$, то $cd=0$. Пришли к противоречию, ведь по условию $c>0$ и $d>0$.

в) Как и ранее, обозначим через c и d разности арифметических прогрессий $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...$ и $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n,\ ...$ соответственно. Тогда по условию $c \geq 1$ и $d \geq 1$. По доказанному в пункте *б* имеем $a_1b_1 + 2a_4b_4 - 3a_3b_3 = 6cd$. Значит,

$$a_3b_3 = \frac{a_1b_1 + 2a_4b_4 - 6cd}{3} \leq \frac{300-6}{3} = 98.$$

Если прогрессии $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...$ и $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n,\ ...$ являются прогрессиями $5, 6, 7, 8, ...$ и $12, 13, 14, 15, ...$ соответственно, то

$$a_1b_1 + 2a_4b_4 = 5 \cdot 12 + 2 \cdot 8 \cdot 15 = 300 \text{ и } a_3b_3 = 7 \cdot 14 = 98.$$

Этот пример показывает, что набольшее возможное значение произведения a_3b_3 равно 98.

Ответ: а) да, например, $1, 3, 5, ...$ и $1, 4, 7, ...$; б) нет; в) 98.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в пункте *а*, – обоснованное решение в пункте *б*, – искомая оценка в пункте *в*, – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 7

13 а) Решите уравнение $8\cdot 16^{\sin^2 x}-2\cdot 4^{\cos 2x}=63$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2};5\pi\right]$.

Решение.

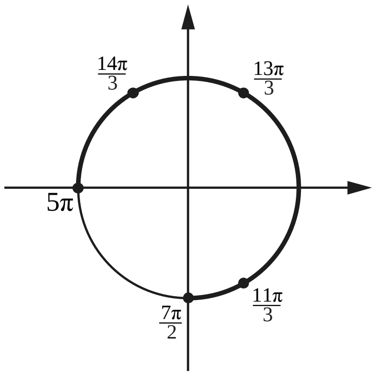
Имеем $8\cdot 16^{\sin^2 x}-2\cdot 4^{\cos 2x}=63$; $8\cdot 4^{2\sin^2 x}-2\cdot 4^{1-2\sin^2 x}=63$.

Обозначим $a=4^{2\sin^2 x}$, $a>0$ при любом значении x. Тогда имеем

$8a-\frac{8}{a}=63$, $8a^2-63a-8=0$, $a_1=-\frac{1}{8}$ и $a_2=8$. Так как $a>0$, a_1 не подходит. Получаем $4^{2\sin^2 x}=8$; $2\sin^2 x=\frac{3}{2}$; $\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{2\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2};5\pi\right]$.



Получим числа $\frac{11\pi}{3}$, $\frac{13\pi}{3}$, $\frac{14\pi}{3}$.

Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т. п.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}+\pi n$; $\frac{2\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{11\pi}{3}$, $\frac{13\pi}{3}$, $\frac{14\pi}{3}$.

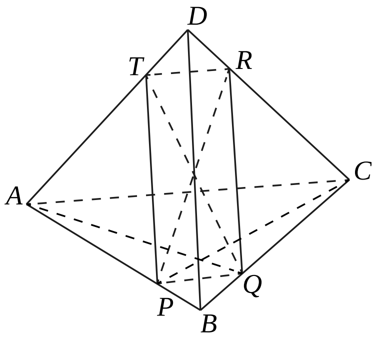
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 5. На ребре AD отмечена точка T так, что $AT:TD=2:1$. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.

б) Найдите площадь сечения.

Решение.



а) Пусть указанная плоскость пересекает рёбра AB, BC и CD в точках P, Q и R соответственно. Из того, что плоскость параллельна сторонам AC и BD, следует что прямые TR и PQ параллельны прямой AC, а прямые RQ и TP параллельны прямой BD, то есть $TPQR$ — параллелограмм. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро перпендикулярно скрещивающейся с ним стороне основания: $AC \perp BD$. Следовательно, параллельные им прямые TR и TP также перпендикулярны, поэтому $TPQR$ — прямоугольник.

б) Из подобия треугольников ADC и TDR следует, что $TR=PQ=\frac{1}{3}AC=2$. Аналогично $TP=RQ=\frac{2}{3}BD=\frac{10}{3}$. Если стороны прямоугольника равны 2 и $\frac{10}{3}$, то его площадь равна $2\cdot\frac{10}{3}=\frac{20}{3}$.

Ответ: б) $\frac{20}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $(5-2x)\log_{-x^2+4x-3}(x-1)\ge 0$.

Решение.

Преобразуем неравенство: $(5-2x)\log_{-(x-2)^2+1}(x-1)\ge 0$.

Будем искать решение при условиях

$$\begin{cases} x>1, \\ x\ne 2, \\ -(x-2)^2+1>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>1, \\ x\ne 2, \\ (x-3)(x-1)<0, \end{cases}$$

откуда $1<x<2$ или $2<x<3$.

Имеем $-(x-2)^2+1<1$ при $x\ne 2$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $1<x<2$.

Тогда $\log_{-(x-2)^2+1}(x-1)>0$. Получим $5-2x\ge 0$, $x\le 2{,}5$.

2. Пусть $2<x<3$.

Тогда $\log_{-(x-2)^2+1}(x-1)<0$. Получим $5-2x\le 0$, $x\ge 2{,}5$.

Ответ: $(1;2);[2{,}5;3)$.

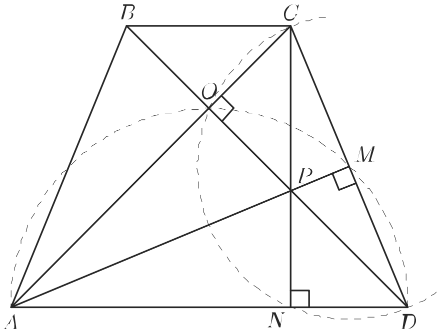
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке M, а окружность с диаметром CD пересекает основание AD в точке N. Отрезки AM и CN пересекаются в точке P.

а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCP$ можно вписать окружность.

б) Найдите радиус этой окружности, если $BC=7$, $AD=17$.

<u>Решение.</u>



а) Точка M лежит на окружности с диаметром AD, поэтому $AM \perp CD$, то есть AM — высота треугольника ACD. Аналогично CN — высота треугольника ACD. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции. По условию задачи $DO \perp AC$, значит, DO — третья высота треугольника ACD. Высоты треугольника пересекаются в одной точке, следовательно, точка P пересечения высот AM и CN лежит на прямой OD, а значит, на диагонали BD.

Трапеция равнобедренная, а её диагонали перпендикулярны, поэтому $\angle CBD = \angle CAD = 45°$. Значит, $CP = BC$, а так как $CO \perp BP$, прямая CO — серединный перпендикуляр к отрезку BP. Точка A лежит на прямой CO, поэтому $AP = AB$. Тогда $AB + CP = AP + BC$, то есть суммы противоположных сторон четырёхугольника $ABCP$ равны. Следовательно, в него можно вписать окружность.

б) Точка N — основание высоты равнобедренной трапеции $ABCD$, опущенной на основание AD, поэтому

$$DN = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(17-7) = 5, \quad AN = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(17+7) = 12.$$

Кроме того,

$$CP = BC = 7,\ AP = AB = CD = \sqrt{DN^2 + CN^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$$
$$AC = AN\sqrt{2} = 12\sqrt{2},\ BP = BC\sqrt{2} = 7\sqrt{2}.$$

Площадь S четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями равна половине произведения его диагоналей, а радиус r окружности, вписанной в четырёхугольник $ABCP$, равен его площади, делённой на полупериметр p четырёхугольника. Следовательно,

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot BP}{AB + BC} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}}{13+7} = \frac{84}{20} = 4,2.$$

Ответ: б) 4,2.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Планируется выдать льготный кредит на **целое** число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 7 млн рублей.

<u>Решение.</u>

Обозначим размер кредита через S млн руб. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает по $0,2S$ млн рублей — всего $0,6S$ за три года.

Рассмотрим погашение кредита за следующие два года. В середине 4-го года долг возрастёт до $1,2S$ млн. Обозначим через x размер суммы, выплачиваемой в конце 4-го и 5-го годов. После выплаты в конце 4-го года долг равен $1,2S-x$, а в середине 5-го года он равен $1,2(1,2S-x)$. В конце 5-го года весь долг должен быть погашен, то есть последняя выплата равна $1,2(1,2S-x)$ и по условию равна x. Значит,

$$1,2(1,2S-x)=x,\quad 2,2x=1,44S,\quad x=\frac{144}{220}S=\frac{36}{55}S,$$

и общий размер выплат равен $0,6S+\frac{72}{55}S=\frac{21}{11}S$. По условию

$$\frac{21}{11}S<7,\quad 21S<77.$$

По условию S целое, значит, наибольшее возможное значение $S = 3$.
Ответ: 3 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено или имеется верный ответ без обоснования	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2-2(x-y)a=9-6a-a^2, \\ x^2+y^2+2(3x+4y)a=1-2a-24a^2 \end{cases}$$

не имеет решений.

<u>Решение.</u>

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y+a)^2=(3-a)^2, \\ (x+3a)^2+(y+4a)^2=(1-a)^2. \end{cases}$$

Если $a\neq 1$, $a\neq 3$, то каждое уравнение системы есть уравнение окружности. В этом случае система не имеет решений тогда и только тогда, когда расстояние между центрами этих окружностей больше суммы или меньше модуля разности их радиусов.

При $a=1$ получаем систему

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2=4, \\ (x+3)^2+(y+4)^2=0. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет. Следовательно, $a=1$ удовлетворяет условию задачи.

При $a=3$ получаем систему

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y+3)^2=0, \\ (x+9)^2+(y+12)^2=4. \end{cases}$$

Эта система тоже решений не имеет. Следовательно, $a=3$ тоже удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a \neq 1,\ a \neq 3$. Расстояние O_1O_2 между центрами $O_1(a, -a)$ и $O_2(-3a, -4a)$ равно $O_1O_2 = \sqrt{16a^2 + 9a^2} = 5|a|$, а радиусы $R_1 = |3 - a|$ и $R_2 = |1 - a|$. Решим два неравенства:

$$O_1O_2 > R_1 + R_2 \quad \text{или} \quad O_1O_2 < |R_1 - R_2|.$$

Получаем $5|a| > |1 - a| + |3 - a|$ или $5|a| < \big||1 - a| - |3 - a|\big|$, откуда $a < -\frac{4}{3}$, $a > \frac{4}{7}$ или $-\frac{2}{5} < a < \frac{2}{5}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right); \left(-\frac{2}{5}; \frac{2}{5}\right); \left(\frac{4}{7}; +\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
Начато верное рассуждение и даже получено одно какое-нибудь значение параметра, но до конца задача не доведена.	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и окружностей (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Известно, что a, b, c и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{8}{29}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 3b$ и $c > 7d$?

<u>Решение.</u>

а) Пусть $a = 10$, $b = 50$, $c = 14$ и $d = 37$. Тогда $\frac{a+c}{b+d} = \frac{24}{87} = \frac{8}{29}$.

б) Предположим, что $11 \cdot \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. Тогда

$$11 \cdot (a+c)bd = (b+d)(ad+bc),$$

$$11abd + 11bcd = abd + bcd + ad^2 + b^2c,$$

$$10abd - ad^2 = b^2c - 10bcd \quad \text{и} \quad ad(10b - d) = bc(b - 10d).$$

С другой стороны, $10b-d \geq 10\cdot 10-99>0>99-10\cdot 10 \geq b-10d$.

Следовательно, числа $ad(10b-d)$ и $bc(b-10d)$ имеют разные знаки и не могут быть равны. Пришли к противоречию.

в) Из условия следует, что $99 \geq a \geq 3b+1$ и $c \geq 7d+1$. Значит, $b \leq \frac{98}{3} < 33$.

Отсюда, учитывая, что число b целое, получаем, что $b \leq 32$.

Используя неравенства

$$a \geq 3b+1, \quad c \geq 7d+1, \quad b \leq 32 \quad \text{и} \quad d \geq 10,$$

получаем

$$\frac{a+c}{b+d} \geq \frac{3b+7d+2}{b+d} = 3+\frac{4d+2}{b+d} \geq 3+\frac{4d+2}{d+32} = 7-\frac{126}{d+32} \geq 7-\frac{126}{42} = \frac{168}{42} = 4.$$

Пусть $a=43$, $b=11$, $c=41$ и $d=10$. Тогда $\frac{a+c}{b+d}=4$. Следовательно, наименьшее возможное значение дроби $\frac{a+c}{b+d}$ равно 4.

Ответ: а) да, например, если $a=10$, $b=50$, $c=14$ и $d=37$; б) нет; в) 4.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в пункте *а*, – обоснованное решение в пункте *б*, – искомая оценка в пункте *в*, – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 8

13 а) Решите уравнение $4\cdot 16^{\sin^2 x}-6\cdot 4^{\cos 2x}=29$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\,3\pi\right]$.

<u>**Решение.**</u>

Имеем $4\cdot 16^{\sin^2 x}-6\cdot 4^{\cos 2x}=29$; $4\cdot 4^{2\sin^2 x}-6\cdot 4^{1-2\sin^2 x}=29$.

Обозначим $a=4^{2\sin^2 x}$, $a>0$ при любом значении x. Тогда имеем $4a-\frac{24}{a}=29$, $4a^2-29a-24=0$, $a_1=-\frac{3}{4}$ и $a_2=8$.

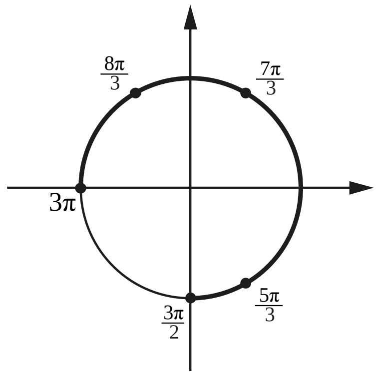
По условию $a>0$, поэтому a_1 не подходит. Получаем $4^{2\sin^2 x}=8$, $2\sin^2 x=\frac{3}{2}$, $\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$,

или

$x=\frac{2\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\,3\pi\right]$.



Получим числа $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$.

Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т. п.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}+\pi n$; $\frac{2\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

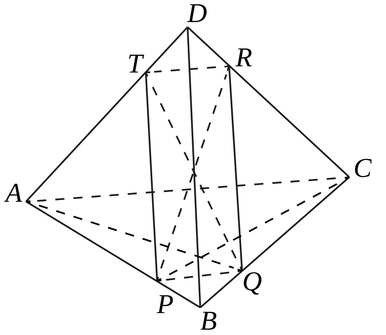
14 В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 5. Боковое ребро пирамиды равно 9. На ребре AD отмечена точка T так, что $AT:TD=1:2$. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.

б) Найдите площадь сечения.

Решение.

а) Пусть указанная плоскость пересекает рёбра AB, BC и CD в точках P, Q и R соответственно. Из того, что плоскость параллельна сторонам AC и BD, следует, что прямые TR и PQ параллельны прямой AC, а прямые RQ и TP параллельны прямой BD, то есть $TPQR$ — параллелограмм. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро перпендикулярно скрещивающейся с ним стороне основания: $AC \perp BD$. Следовательно, параллельные им прямые TR и TP также перпендикулярны, поэтому $TPQR$ — прямоугольник.



б) Из подобия треугольников ADC и TDR следует, что $TR=PQ=\frac{2}{3}AC=\frac{10}{3}$.

Аналогично $TP=RQ=\frac{1}{3}BD=3$. Если стороны прямоугольника равны $\frac{10}{3}$ и 3, то его площадь равна $\frac{10}{3}\cdot 3=10$.

Ответ: б) 10.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $(7-2x)\log_{-x^2+6x-8}(x-2)\geq 0$.

Решение.

Преобразуем неравенство: $(7-2x)\log_{-(x-3)^2+1}(x-2)\geq 0$.

Будем искать решение при условиях

$$\begin{cases} x > 2, \\ x \neq 3, \\ -(x-3)^2 + 1 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 2, \\ x \neq 3, \\ (x-4)(x-2) < 0, \end{cases}$$

откуда $2 < x < 3$ или $3 < x < 4$.

Имеем $-(x-3)^2 + 1 < 1$ при $x \neq 3$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $2 < x < 3$.

Тогда $\log_{-(x-3)^2+1}(x-2) > 0$. Получим $7 - 2x \geq 0$, $x \leq 3{,}5$.

2. Пусть $3 < x < 4$.

Тогда $\log_{-(x-3)^2+1}(x-2) < 0$. Получим $7 - 2x \leq 0$, $x \geq 3{,}5$.

Ответ: $(2;3);[3{,}5;4)$.

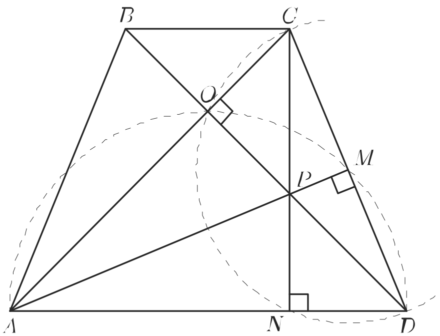
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке M, а окружность с диаметром CD пересекает основание AD в точке N. Отрезки AM и CN пересекаются в точке P.

а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCP$ можно вписать окружность.

б) Найдите радиус этой окружности, если $BC = 7$, $AD = 23$.

<u>**Решение.**</u>



а) Точка M лежит на окружности с диаметром AD, поэтому $AM \perp CD$, то есть AM — высота треугольника ACD. Аналогично CN — высота треугольника ACD. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции. По условию задачи $DO \perp AC$, значит, DO — третья высота треугольника ACD. Высоты треугольника пересекаются в одной точке, следовательно, точка P пересечения высот

AM и CN лежит на прямой OD, а значит, на диагонали BD.

Трапеция равнобедренная, а её диагонали перпендикулярны, поэтому $\angle CBD = \angle CAD = 45°$. Значит, $CP = BC$, а так как $CO \perp BP$, прямая CO — серединный перпендикуляр к отрезку BP. Точка A лежит на прямой CO, поэтому $AP = AB$. Тогда $AB + CP = AP + BC$, то есть суммы противоположных сторон четырёхугольника $ABCP$ равны. Следовательно, в него можно вписать окружность.

б) Точка N — основание высоты равнобедренной трапеции $ABCD$, опущенной на основание AD, поэтому

$$DN = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(23 - 7) = 8, \quad AN = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(23 + 7) = 15.$$

Кроме того,

$$CP = BC = 7, \ AP = AB = CD = \sqrt{DN^2 + CN^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17,$$
$$AC = AN\sqrt{2} = 15\sqrt{2}, \ BP = BC\sqrt{2} = 7\sqrt{2}.$$

Площадь S четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями равна половине произведения его диагоналей, а радиус r окружности, вписанной в четырёхугольник $ABCP$, равен его площади, делённой на полупериметр p четырёхугольника, следовательно,

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot BP}{AB + BC} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 15\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}}{17 + 7} = \frac{105}{24} = \frac{35}{8} = 4{,}375.$$

Ответ: б) 4,375.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Планируется выдать льготный кредит на **целое** число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 10 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 6 млн рублей.

Решение.

Обозначим размер кредита через S млн руб. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает по $0{,}1S$ млн. Всего $0{,}3S$ за три года.

Рассмотрим погашение кредита за следующие два года. В середине 4-го года долг возрастёт до $1{,}1S$ млн. Обозначим через x размер суммы, выплачиваемой в конце 4-го и 5-го годов. После выплаты в конце 4-го года долг равен $1{,}1S-x$, а в середине 5-го года он равен $1{,}1(1{,}1S-x)$. В конце 5-го года весь долг должен быть погашен, то есть последняя выплата равна $1{,}1(1{,}1S-x)$ и по условию равна x. Значит,

$$1{,}1(1{,}1S-x)=x, \quad 2{,}1x=1{,}21S, \quad x=\frac{121}{210}S,$$

и общий размер выплат равен $0{,}3S+\frac{242}{210}S=\frac{61}{42}S$. По условию

$$\frac{61}{42}S<6, \quad 61S<252.$$

По условию S целое, значит, наибольшее возможное значение $S = 4$.

Ответ: 4 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено или имеется верный ответ без обоснования	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(y-x)a=1+2a-a^2, \\ x^2+y^2+2(x-y)a=1-2a-a^2 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.

Запишем систему в виде

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y+a)^2=(a+1)^2,\\(x+a)^2+(y-a)^2=(1-a)^2.\end{cases}$$

Если $a\neq -1,\ a\neq 1$, то каждое уравнение системы есть уравнение окружности.

В этом случае система не имеет решений тогда и только тогда, когда расстояние между центрами этих окружностей больше суммы или меньше модуля разности их радиусов.

При $a=-1$ получаем систему

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=0,\\(x-1)^2+(y+1)^2=4.\end{cases}$$

Эта система решений не имеет. Следовательно, $a=-1$ удовлетворяет условию задачи.

При $a=1$ получаем систему

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=4,\\(x+1)^2+(y-1)^2=0.\end{cases}$$

Эта система тоже решений не имеет. Следовательно, $a=1$ тоже удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a\neq -1,\ a\neq 1$. Расстояние O_1O_2 между центрами $O_1(a,-a)$ и $O_2(-a,a)$ равно $O_1O_2=\sqrt{4a^2+4a^2}=2\sqrt{2}|a|$, а радиусы $R_1=|a+1|$ и $R_2=|1-a|$. Решим два неравенства:

$$O_1O_2>R_1+R_2 \text{ или } O_1O_2<|R_1-R_2|.$$

Получаем $2\sqrt{2}|a|>|a+1|+|1-a|$ или $2\sqrt{2}|a|<\big||a+1|-|1-a|\big|$; откуда $a<-\frac{1}{\sqrt{2}};\ a>\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
Начато верное рассуждение и даже получено одно какое-нибудь значение параметра, но до конца задача не доведена	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и окружностей (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Известно, что a, b, c и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d}=\frac{7}{23}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 12 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a>4b$ и $c>8d$?

<u>Решение.</u>

а) Пусть $a=10$, $b=50$, $c=11$ и $d=19$. Тогда $\frac{a+c}{b+d}=\frac{21}{69}=\frac{7}{23}$.

б) Предположим, что $12\cdot\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$. Тогда

$$12\cdot(a+c)bd=(b+d)(ad+bc),$$

$$12abd+12bcd=abd+bcd+ad^2+b^2c,$$

$$11abd-ad^2=b^2c-11bcd \quad \text{и}$$

$$ad(11b-d)=bc(b-11d).$$

С другой стороны,

$$11b-d\ge 11\cdot 10-99>0>99-10\cdot 11\ge b-11d.$$

Следовательно, числа $ad(11b-d)$ и $bc(b-11d)$ имеют разные знаки и не могут быть равны. Пришли к противоречию.

в) Из условия следует, что $99\ge a\ge 4b+1$ и $c\ge 8d+1$. Значит, $b\le\frac{98}{4}<25$. Отсюда, учитывая, что число b целое, получаем, что $b\le 24$.

Используя неравенства

$$a\ge 4b+1,\quad c\ge 8d+1,\quad b\le 24 \quad \text{и} \quad d\ge 10,$$

получаем

$$\frac{a+c}{b+d}\ge\frac{4b+8d+2}{b+d}=4+\frac{4d+2}{b+d}\ge 4+\frac{4d+2}{d+24}=8-\frac{94}{d+24}\ge 8-\frac{94}{34}=\frac{178}{34}=\frac{89}{17}.$$

Пусть $a=97$, $b=19$, $c=81$ и $d=15$. Тогда $\frac{a+c}{b+d}=\frac{178}{34}=\frac{89}{17}$. Следовательно, наименьшее возможное значение дроби $\frac{a+c}{b+d}$ равно $\frac{89}{17}$.

Ответ: а) да, например, если $a=10$, $b=50$, $c=11$ и $d=19$; б) нет; в) $\frac{89}{17}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в пункте *а*, – обоснованное решение в пункте *б*, – искомая оценка в пункте *в*, – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 9

13 а) Решите уравнение $\dfrac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x-\sqrt{3}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\,2\pi\right]$.

Решение.

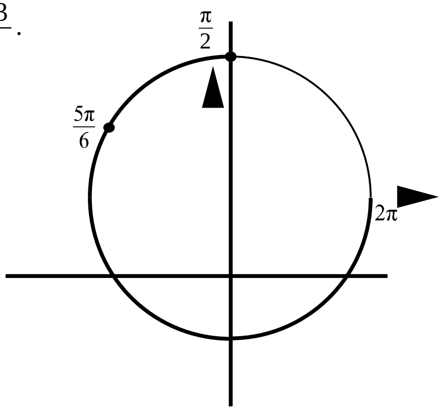
а) Перейдём к системе:

$$\begin{cases}\log_2(\sin x)\left(\log_2(\sin x)+1\right)=0,\\ 2\cos x-\sqrt{3}\neq 0.\end{cases}$$

Пусть $y=\log_2(\sin x)$.

Получаем $y(y+1)=0$, откуда $y=0$ или $y=-1$.

После обратной замены получаем $\log_2(\sin x)=0$ или $\log_2(\sin x)=-1$, то есть $\sin x=1$ или $\sin x=\dfrac{1}{2}$ при условии $\cos x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Если $\sin x=\dfrac{1}{2}$, то

$$x=\frac{\pi}{6}+2\pi k \text{ или } x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ k,n\in\mathbb{Z}.$$

Числа $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$ не удовлетворяют условию $\cos x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Если $\sin x=1$, то $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2};\,2\pi\right]$. Получим $x=\dfrac{5\pi}{6}$ или $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т. п.

Ответ: а) $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\ n,m\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{5\pi}{6}$.

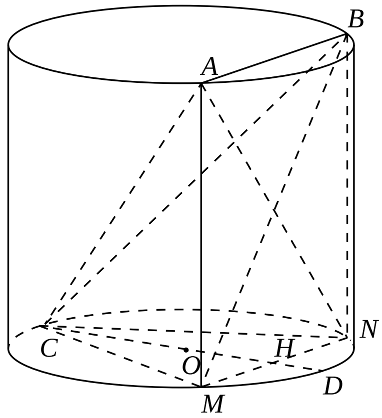
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 3 и радиусом основания 8 проведена хорда AB, равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD, перпендикулярный AB. Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD, лежат с одной стороны от сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.

б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

<u>Решение.</u>



а) Для построения сечения опустим перпендикуляры AM и BN на второе основание цилиндра. Отрезки AM и BN параллельны и равны, значит, $ABNM$ — параллелограмм. Так как прямые AM и BN перпендикулярны основаниям цилиндра и, в частности, прямой AB, параллелограмм $ABNM$ является прямоугольником. Отрезки AN и BM равны как диагонали прямоугольника, что и требовалось доказать.

б) Площадь прямоугольника $ABNM$ равна $3 \cdot 8 = 24$. Пусть H — точка пересечения отрезков NM и CD. Отрезок OH равен $\sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$. Высота CH пирамиды $CABNM$ равна $8 + 4\sqrt{3}$. Следовательно, объём пирамиды $CABNM$ равен

$$\frac{1}{3} \cdot 24 \cdot \left(8 + 4\sqrt{3}\right) = 64 + 32\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $64 + 32\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\dfrac{35^{|x|} - 5^{|x|} - 5 \cdot 7^{|x|} + 5}{2^{\sqrt{x+2}} + 1} \geq 0.$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{\left(7^{|x|}-1\right)\left(5^{|x|}-5\right)}{2^{\sqrt{x+2}}+1} \geq 0.$$

Имеем $2^{\sqrt{x+2}}+1>0$ при любом $x \geq -2$; при $x<-2$ неравенство решений не имеет.

Если $x=0$, то $7^{|x|}-1=0$.

Если $x \neq 0$, то $7^{|x|}-1>0$, тогда $5^{|x|}-5 \geq 0$, откуда $|x| \geq 1$.

Ответ: $-2 \leq x \leq -1$; $x=0$; $x \geq 1$.

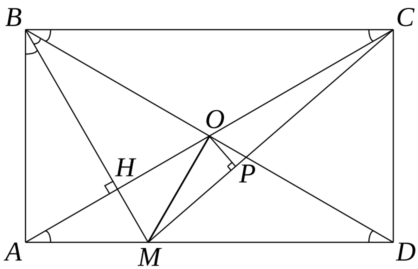
Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle DBC = 30°$.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC=9$.

Решение.



а) Обозначим $\angle CBD = \alpha$. Треугольник BMD равнобедренный, поэтому $\angle DBM = \angle BDM = \angle CBD = \alpha$.

Прямоугольные треугольники ACB и BDA равны по катету и гипотенузе, поэтому $\angle ACB = \angle ADB = \alpha$.

Пусть H — точка пересечения BM и AC. Тогда BH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла. Значит, $\angle ABH = \angle ACB = \alpha$.

Следовательно, $\angle ABM = \angle DBM = \angle CBD = \frac{1}{3} \cdot 90° = 30°$.

б) Имеем $AB = BC \operatorname{tg} 30° = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$,

$AM = AB\,\mathrm{tg}\,30° = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$, $MD = AD - AM = 9 - 3 = 6$.

Из прямоугольного треугольника CMD находим

$MC = \sqrt{CD^2 + MD^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 + 6^2} = 3\sqrt{7}$.

Пусть O — центр прямоугольника $ABCD$. Расстояние от центра O прямоугольника $ABCD$ до прямой CM равно высоте OP треугольника CMO. Площадь треугольника CMO равна половине площади треугольника ACM:

$S_{OCM} = \dfrac{1}{2} S_{ACM} = \dfrac{1}{4} AM \cdot AB = \dfrac{1}{2} CM \cdot OP$; $\quad OP = \dfrac{AM \cdot AB}{2 \cdot MC} = \dfrac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

Ответ: б) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 У фермера есть два поля, каждое площадью 8 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 350 ц/га, а на втором — 200 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 300 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 2500 руб. за центнер, а свёклу — по цене 3000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение.
Заметим, что на первом поле с одного гектара можно собрать либо 350 центнеров картофеля и получить 875 000 рублей, либо 250 центнеров свёклы и получить 750 000 рублей. Таким образом, нужно всё первое поле отдать под картофель. На втором поле с одного гектара можно собрать либо 200 центнеров картофеля и получить 500 000 рублей, либо 300 центнеров свёклы и получить 900 000 рублей. Поэтому второе поле нужно целиком отдать под свёклу.
В этом случае фермер сможет заработать $8 \cdot 350 \cdot 2500 + 8 \cdot 300 \cdot 3000 =$ $= 14\,200\,000$ (рублей).
Ответ: 14,2 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено или имеется верный ответ без обоснования	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(2x+a+1+\operatorname{tg}x\right)^2=\left(2x+a-1-\operatorname{tg}x\right)^2$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.
Преобразуем уравнение:

$$\left(2x+a+1+\operatorname{tg}x\right)^2-\left(2x+a-1-\operatorname{tg}x\right)^2=0;\quad \left(2+2\operatorname{tg}x\right)\left(4x+2a\right)=0,$$

откуда

$\operatorname{tg}x=-1$ или $x=-\frac{a}{2}$ при условии, что $-\frac{a}{2}\ne\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Число $\frac{\pi}{2}+\pi k$ принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ при $k=-1$ и $k=0$.

Уравнение $\operatorname{tg}x=-1$ имеет на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ единственный корень $-\frac{\pi}{4}$.

Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, только если число $-\frac{a}{2}$ или находится вне отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, или совпадает с $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или совпадает с $-\frac{\pi}{4}$, то есть $-\frac{a}{2}<-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{a}{2}>\frac{\pi}{2}$; $-\frac{a}{2}=-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{a}{2}=\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{a}{2}=-\frac{\pi}{4}$; откуда $a\le-\pi$; $a=\frac{\pi}{2}$ или $a\ge\pi$.

Ответ: $a\le-\pi$; $a=\frac{\pi}{2}$; $a\ge\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Конечная возрастающая последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ состоит из $n\ge3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k\le n-2$ выполнено равенство $4a_{k+2}=7a_{k+1}-3a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n=5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n\ge3$ выполняться равенство $a_n=4a_2-3a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n=527$?

__**Решение.**__

а) Например, подходит последовательность 1, 65, 113, 149, 176.

б) При всех натуральных $k\le n-1$ положим $b_k=a_{k+1}-a_k$. Тогда равенство $4a_{k+2}=7a_{k+1}-3a_k$ равносильно равенству $4b_{k+1}=3b_k$. Следовательно, последовательность b_k при $1\le k\le n-1$ образует геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{3}{4}$.

Имеем

$$a_n=a_1+b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}=a_1+\frac{b_1(1-q^{n-1})}{1-q}<a_1+\frac{b_1}{1-q}=a_1+4b_1=4a_2-3a_1.$$

Значит, равенство $a_n=4a_2-3a_1$ ни при каком $n\ge3$ выполняться не может.

в) Как доказано в решении пункта б), последовательность $b_k=a_{k+1}-a_k$ при $1\le k\le n-1$ образует геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{3}{4}$.

Имеем $527=a_n=a_1+\frac{b_1(1-q^{n-1})}{1-q}=a_1+\frac{b_1(4^{n-1}-3^{n-1})}{4^{n-2}}$. Следовательно, b_1

делится на 4^{n-2}, а a_1 даёт при делении на $4^{n-1}-3^{n-1}$ тот же остаток, что и число 527. Так как $4^5=1024>527>b_1\geq 4^{n-2}$, получаем, что $n\leq 6$. Остатки при делении числа 527 на $4^2-3^2=7$, $4^3-3^3=37$, $4^4-3^4=175$ и $4^5-3^5=781$ соответственно равны 2, 9, 2 и 527. Значит, a_1 не может быть меньше 2.

Пример последовательности 2, 194, 338, 446, 527 показывает, что a_1 может равняться 2.

Ответ: а) например, последовательность 1, 65, 113, 149, 176; б) нет; в) 2.

Содержание критерия	**Баллы**
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 10

13 а) Решите уравнение $\dfrac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x+\sqrt{3}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

__**Решение.**__

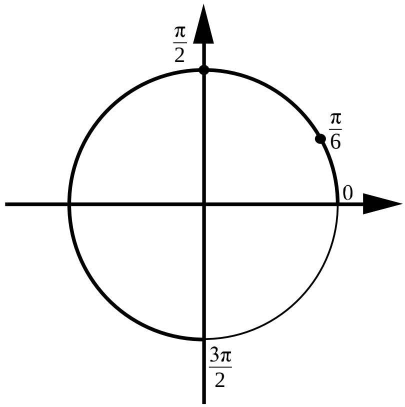
а) Перейдём к системе:

$$\begin{cases}\log_2(\sin x)\left(\log_2(\sin x)+1\right)=0,\\ 2\cos x+\sqrt{3}\neq 0.\end{cases}$$

Пусть $y=\log_2(\sin x)$.

Получаем $y(y+1)=0$, откуда $y=0$ или $y=-1$.

После обратной замены получаем $\log_2(\sin x)=0$ или $\log_2(\sin x)=-1$, то есть $\sin x=1$ или $\sin x=\dfrac{1}{2}$ при условии $\cos x\neq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Если $\sin x=\dfrac{1}{2}$, то $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$ или $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ k,n\in\mathbb{Z}$. Числа $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, не удовлетворяют условию $\cos x\neq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Если $\sin x=1$, то $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.



б) С помощью числовой окружности отберём корни на отрезке $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Получим $x=\dfrac{\pi}{6}$ или $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т. п.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\ k,m\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{2}$.

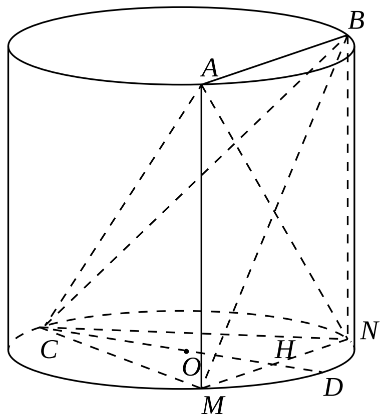
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 9 и радиусом основания 2 проведена хорда AB, равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD, перпендикулярный AB. Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD, лежат с одной стороны от сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.

б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

Решение.



а) Для построения сечения опустим перпендикуляры AM и BN на второе основание цилиндра. Отрезки AM и BN параллельны и равны, значит, $ABNM$ — параллелограмм. Так как прямые AM и BN перпендикулярны основаниям цилиндра и, в частности, прямой AB, параллелограмм $ABNM$ является прямоугольником. Отрезки AN и BM равны как диагонали прямоугольника, что и требовалось доказать.

б) Площадь прямоугольника $ABNM$ равна $9 \cdot 2 = 18$. Пусть H — точка пересечения отрезков NM и CD. Отрезок OH равен $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Высота CH пирамиды $CABNM$ равна $2 + \sqrt{3}$. Следовательно, объём пирамиды $CABNM$ равен

$$\frac{1}{3} \cdot 18 \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right) = 12 + 6\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $12 + 6\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\dfrac{3^{|x|} \cdot 2^x - 2^x - 8 \cdot 3^{|x|} + 8}{2^{\sqrt{x}} - 2} \geq 0.$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{\left(3^{|x|}-1\right)\left(2^{x}-8\right)}{2^{\sqrt{x}}-2}\geq 0.$$

Если $x=0$, то $3^{|x|}-1=0$. Неравенство при этом верно.

Если $x\neq 0$, то $3^{|x|}-1>0$. Получаем

$$\frac{2^{x}-8}{2^{\sqrt{x}}-2}\geq 0;$$

$$\begin{cases}2^{x}-8\geq 0,\\ 2^{\sqrt{x}}-2>0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}2^{x}-8\leq 0,\\ 2^{\sqrt{x}}-2<0.\end{cases}$$

Решение первой системы $x\geq 3$.

Решение второй системы $0\leq x<1$.

Ответ: $0\leq x<1$; $x\geq 3$.

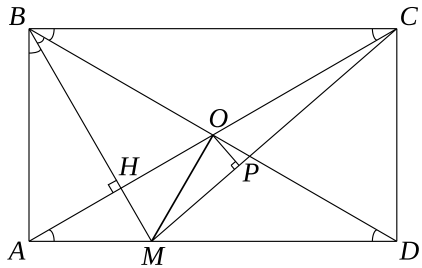
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

а) Докажите, что лучи BM и BD делят угол ABC на три равные части.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC=6\sqrt{21}$.

Решение.



а) Обозначим $\angle CBD=\alpha$. Треугольник BMD равнобедренный, поэтому $\angle DBM=\angle BDM=\angle CBD=\alpha.$

Прямоугольные треугольники ACB и BDA равны по катету и гипотенузе, поэтому $\angle ACB=\angle ADB=\alpha.$

Пусть H — точка пересечения BM и AC. Тогда BH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла. Значит, $\angle ABH=\angle ACB=\alpha.$

Следовательно, $\angle ABM = \angle DBM = \angle CBD = \frac{1}{3} \cdot 90° = 30°$.

б) Имеем $AB = BC \operatorname{tg} 30° = \frac{6\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{7}$,

$AM = AB \operatorname{tg} 30° = \frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{21}$, $MD = AD - AM = 6\sqrt{21} - 2\sqrt{21} = 4\sqrt{21}$.

Из прямоугольного треугольника CMD находим

$MC = \sqrt{CD^2 + MD^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{21}\right)^2 + \left(6\sqrt{7}\right)^2} = 14\sqrt{3}$.

Пусть O — центр прямоугольника $ABCD$. Расстояние от центра O прямоугольника $ABCD$ до прямой CM равно высоте OP треугольника CMO. Площадь треугольника CMO равна половине площади треугольника ACM:

$S_{OCM} = \frac{1}{2} S_{ACM} = \frac{1}{4} AM \cdot AB = \frac{1}{2} CM \cdot OP$; $\quad OP = \frac{AM \cdot AB}{2MC} = \frac{2\sqrt{21} \cdot 6\sqrt{7}}{2 \cdot 14\sqrt{3}} = 3$.

Ответ: б) 3.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 У фермера есть два поля, каждое площадью 15 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 400 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 2000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 3000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение.

Заметим, что на первом поле с одного гектара можно собрать либо 400 центнеров картофеля и получить 800 000 рублей, либо 250 центнеров свёклы и получить 750 000 рублей. Таким образом, нужно всё первое поле отдать под картофель. На втором поле с одного гектара можно собрать либо 300 центнеров картофеля и получить 600 000 рублей, либо 400 центнеров свёклы и получить 1 200 000 рублей. Поэтому второе поле нужно целиком отдать под свёклу.

В этом случае фермер сможет заработать

$$15 \cdot 400 \cdot 2000 + 15 \cdot 400 \cdot 3000 = = 30000000 \text{ (рублей)}.$$

Ответ: 30 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(2x+a+1-\operatorname{tg}x\right)^2=\left(2x+a-1+\operatorname{tg}x\right)^2$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[0;\ \pi\right]$.

Решение.

Преобразуем уравнение: $\left(2x+a+1-\operatorname{tg}x\right)^2-\left(2x+a-1+\operatorname{tg}x\right)^2=0$;

$\left(2-2\operatorname{tg}x\right)\left(4x+2a\right)=0$, откуда $\operatorname{tg}x=1$ или $x=-\frac{a}{2}$ при условии, что $-\frac{a}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Уравнение $\operatorname{tg}x=1$ имеет на отрезке $\left[0;\ \pi\right]$ единственный корень $\frac{\pi}{4}$. Число $\frac{\pi}{2}+\pi k$ принадлежит отрезку $\left[0;\ \pi\right]$ при $k=0$.

Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение на отрезке $\left[0;\ \pi\right]$, только если число $-\frac{a}{2}$ или находится вне отрезка $\left[0;\ \pi\right]$, или совпадает с $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или совпадает с $\frac{\pi}{4}$, то есть $-\frac{a}{2}<0; -\frac{a}{2}>\pi; -\frac{a}{2}=\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{a}{2}=\frac{\pi}{4}$; откуда $a<-2\pi; a=-\pi; a=-\frac{\pi}{2}$ или $a>0$.

Ответ: $a<-2\pi; a=-\pi;\ a=-\frac{\pi}{2}; a>0$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ состоят из натуральных чисел.

а) Приведите пример таких прогрессий, для которых $a_1b_1 + 2a_3b_3 = 4a_2b_2$.

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $2a_1b_1 + a_4b_4 = 3a_2b_2$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_2b_2, если $2a_1b_1 + a_4b_4 \le 210$?

Решение.

а) Подходящим примером являются прогрессии $2, 3, 4, \ldots$ и $2, 3, 4, \ldots$ Для этих прогрессий имеем $a_1b_1 + 2a_3b_3 = 2\cdot 2 + 2\cdot 4\cdot 4 = 36 = 4\cdot 3\cdot 3 = 4a_2b_2$.

б) Обозначим через c и d разности арифметических прогрессий $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ соответственно. Тогда

$$2a_1b_1 + a_4b_4 = 2a_1b_1 + (a_1 + 3c)(b_1 + 3d) = 3a_1b_1 + 3a_1d + 3b_1c + 9cd,$$

$$3a_2b_2 = 3(a_1 + c)(b_1 + d) = 3a_1b_1 + 3a_1d + 3b_1c + 3cd \text{ и}$$

$$2a_1b_1 + a_4b_4 - 3a_2b_2 = 6cd.$$

Если $2a_1b_1 + a_4b_4 = 3a_2b_2$, то $cd = 0$. Пришли к противоречию, ведь по условию $c > 0$ и $d > 0$.

в) По условию $c \ge 1$ и $d \ge 1$. По доказанному в пункте б) имеем

$$2a_1b_1 + a_4b_4 - 3a_2b_2 = 6cd.$$

Значит,

$$a_2b_2 = \frac{2a_1b_1 + a_4b_4 - 6cd}{3} \le \frac{210 - 6}{3} = 68,$$

то есть $a_2b_2 \le 68$. Покажем, что случай $a_2b_2 = 68$ возможен. Это равенство выполняется, например, для прогрессий $3, 4, 5, 6, \ldots$ и $16, 17, 18, 19, \ldots$ Для этих прогрессий $2a_1b_1 + a_4b_4 = 210$ и $a_2b_2 = 4\cdot 17 = 68$.

Ответ: а) $2, 3, 4, \ldots$ и $2, 3, 4, \ldots$; б) нет; в) 68.

Содержание критерия	**Баллы**
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 11

13 а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{3}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}+2=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\,3\pi\right]$.

<u>Решение.</u>

а) Преобразуем уравнение:

$$\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{3}{\cos x}+2=0.$$

Сделаем замену $y=\dfrac{1}{\cos x}$. Получим

$$y^2+3y+2=0;$$

$$y=-1 \text{ или } y=-2.$$

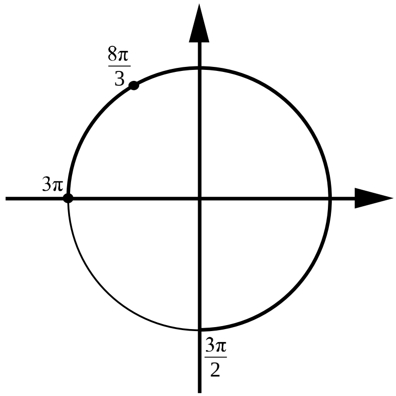
Значит, $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ или $\cos x=-1$.

Если $\cos x=-\dfrac{1}{2}$, то

$$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Если $\cos x=-1$, то

$$x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$



б) С помощью числовой окружности отберём корни на отрезке $\left[\dfrac{3\pi}{2};\,3\pi\right]$.

Получим $x=\dfrac{8\pi}{3}$ или $x=3\pi$.

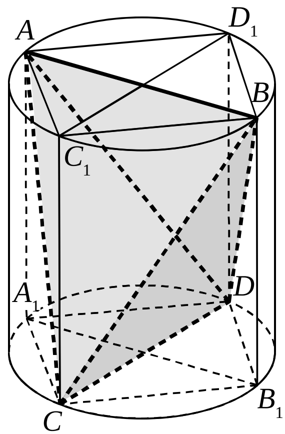
Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т. п.

Ответ: а) $\pi+2\pi n;\ \dfrac{2\pi}{3}+2\pi m;\ -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k,n,m\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{8\pi}{3};\ 3\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Отрезок AB — диаметр верхнего основания цилиндра, CD — диаметр нижнего, причём отрезки AB и CD не лежат на параллельных прямых.
а) Докажите, что у тетраэдра $ABCD$ скрещивающиеся рёбра попарно равны.
б) Найдите объём этого тетраэдра, если $AC = 6$, $AD = 8$, а радиус цилиндра равен 3.

Решение.



а) Рёбра AB и CD равны как диаметры равных окружностей. Проведём образующие AA_1 и BB_1. Тогда A_1B_1 — диаметр нижнего основания, поэтому A_1DB_1C — прямоугольник. Значит, $A_1C = B_1D$. Треугольники CAA_1 и DBB_1 равны по двум катетам. Значит, их гипотенузы равны: $AC = BD$. Аналогично доказывается равенство $AD = BC$.

б) Построим ещё две образующие CC_1 и DD_1. Многогранник $A_1DB_1CAD_1BC_1$ — прямая призма с основанием A_1DB_1C. Найдём длины её рёбер.

Пусть $A_1C = x$, $A_1D = y$ и $A_1A = h$. По теореме Пифагора

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 36, \\ y^2 + h^2 = 64, \\ x^2 + y^2 = 36, \end{cases}$$

откуда $x = A_1C = 2$, $y = A_1D = 4\sqrt{2}$, $h = AA_1 = 4\sqrt{2}$.

Объём всей призмы равен $A_1C \cdot A_1D \cdot AA_1 = 64$, а объём каждой из четырёх пирамид AA_1DC, BB_1DC, DD_1AB и CC_1AB равен $\frac{1}{6} \cdot 64 = \frac{32}{3}$.

Следовательно, объём тетраэдра $ABCD$ равен $64 - \frac{4 \cdot 32}{3} = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$.

Ответ: б) $21\frac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

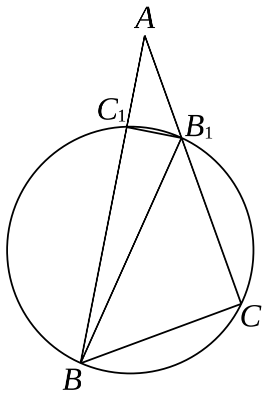
15 Решите неравенство $\log_{49}(x+4)+\log_{(x^2+8x+16)}\sqrt{7}\le -\frac{3}{4}$.

Решение.
Преобразуем неравенство:
$$\frac{1}{2}\log_7(x+4)+\frac{1}{4}\log_{x+4}7+\frac{3}{4}\le 0.$$
Пусть $\log_7(x+4)=y$, тогда
$$\frac{y}{2}+\frac{1}{4y}+\frac{3}{4}\le 0;$$
$$\frac{2y^2+1+3y}{4y}\le 0;\quad \frac{2\left(y+\frac{1}{2}\right)(y+1)}{4y}\le 0;\quad y\le -1,\quad -\frac{1}{2}\le y<0.$$
Следовательно,
$$\log_7(x+4)\le -1 \quad \text{или} \quad -\frac{1}{2}\le \log_7(x+4)<0.$$
Из первого неравенства находим
$$0<x+4\le\frac{1}{7},\qquad \text{то есть } -4<x\le -3\frac{6}{7}.$$
Из второго неравенства находим
$$\frac{1}{\sqrt{7}}\le x+4<1;\quad \text{то есть } \frac{1}{\sqrt{7}}-4\le x<-3.$$
Ответ: $-4<x\le-\frac{27}{7}$; $-4+\frac{1}{\sqrt{7}}\le x<-3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.
а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.
б) Вычислите длину стороны BC и радиус данной окружности, если $\angle A=30^\circ$, $B_1C_1=5$ и площадь треугольника AB_1C_1 в пять раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

Решение.



а) Заметим, что $\angle AB_1C_1 + \angle C_1B_1C = 180^\circ$. Четырёхугольник BCB_1C_1 вписан в окружность, поэтому $\angle C_1BC + \angle C_1B_1C = 180^\circ$. Значит, $\angle AB_1C_1 = \angle C_1BC = \angle ABC$. Следовательно, треугольники ABC и AB_1C_1 подобны по двум углам.

б) Площадь треугольника AB_1C_1 в пять раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1, поэтому площадь треугольника ABC в шесть раз больше площади треугольника AB_1C_1 и коэффициент подобия этих треугольников равен $\sqrt{6}$. Отсюда следует, что $BC = \sqrt{6}B_1C_1 = 5\sqrt{6}$.

Пусть $AB_1 = x$, тогда $AB = \sqrt{6}x$. Найдём BB_1 по теореме косинусов:

$$BB_1^2 = x^2 + 6x^2 - 2x\cdot\sqrt{6}x\cdot\cos 30^\circ = x^2\left(7-\sqrt{18}\right).$$ Следовательно,

$$BB_1 = \sqrt{7-\sqrt{18}}\,x.$$

Теперь по теореме синусов из треугольника ABB_1 получаем

$$\frac{AB}{\sin\angle AB_1B} = \frac{BB_1}{\sin\angle A};\quad \sin\angle AB_1B = \frac{AB}{BB_1}\sin\angle A.$$

Но $\sin\angle AB_1B = \sin\angle BB_1C$, поскольку синусы смежных углов равны.

Получаем $\sin\angle BB_1C = \dfrac{AB}{BB_1}\sin\angle A = \dfrac{\sqrt{6}x}{\sqrt{7-\sqrt{18}}\,x}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{7-\sqrt{18}}}$.

Теперь находим радиус окружности, описанной около треугольника BCB_1:

$$2R = \frac{BC}{\sin\angle BB_1C} = \frac{5\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{7-\sqrt{18}}}{\sqrt{6}} = 10\sqrt{7-\sqrt{18}};\quad R = 5\sqrt{7-\sqrt{18}}.$$

Ответ: б) $5\sqrt{6}$; $5\sqrt{7-\sqrt{18}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0,8S$	$0,5S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 4 млн рублей.

Решение.

В январе 2017 года долг будет составлять $1,15S$ млн рублей, а в июле 2017 года — $0,8S$ млн рублей. Значит, выплата в 2017 году составит $0,35S$ млн рублей.

В январе 2018 года долг будет составлять $1,15\cdot 0,8S = 0,92S$ млн рублей, а в июле 2018 года — $0,5S$ млн рублей. Значит, выплата в 2018 году составит $0,42S$ млн рублей.

В январе 2019 года долг перед банком составит $1{,}15\cdot 0{,}5S=0{,}575S$, а в июле — 0 рублей. Значит, выплата в 2019 году составит $0{,}575S$ млн рублей.

Решим систему:

$$\begin{cases}0{,}35S<4,\\0{,}42S<4,\\0{,}575S<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S<11{,}42...,\\S<9{,}52...,\\S<6{,}95...\end{cases}$$

Наибольшее целое решение этой системы — $S=6$ млн рублей.

Ответ: 6.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено или имеется верный ответ без обоснования	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(2x+\ln(x+2a)\right)^2=\left(2x-\ln(x+2a)\right)^2$$

имеет единственный корень на отрезке $[0;1]$.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$\left(2x+\ln(x+2a)\right)^2-\left(2x-\ln(x+2a)\right)^2=0;$$

$$4x\cdot 2\ln(x+2a)=0.$$

Получаем корни: $x=0$ (при условии $a>0$) или $x=1-2a$.

1. При $a<0$ уравнение имеет единственный корень $x=1-2a$, не принадлежащий отрезку $[0;1]$.

2. При $a=0$ уравнение имеет единственный корень $x=1$, принадлежащий отрезку $[0;1]$.

3. При $a>0$ единственный корень $x=0$ на отрезке $[0;1]$ будет, только если $1-2a\le 0$, то есть $a\ge\frac{1}{2}$.

Ответ: $a=0$ или $a\ge\frac{1}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, разность которых делится на 5.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 38, если изначально по одному разу были написаны все натуральные числа от 11 до 22 включительно?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, произведение которых оканчивается на цифру 4, если изначально по одному разу были написаны квадраты натуральных чисел от 63 до 96 включительно?

в) Пусть известно, что на доске осталось ровно два числа, а изначально по одному разу были написаны квадраты натуральных чисел от 63 до 96 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

<u>Решение.</u>

а) Пусть стирали следующие пары чисел: 11 и 21, 12 и 17, 13 и 18, 14 и 19, 15 и 20. Тогда на доске останутся числа 16 и 22, сумма которых равна 38.

б) Среди чисел от 63 до 96 ровно 6 чисел, дающих при делении на 5 остатки 2, и ровно по 7 чисел, дающих при делении на 5 четыре других возможных остатка. Следовательно, среди квадратов чисел от 63 до 96 ровно 7 чисел, делящихся на 5, ровно 13 чисел, дающих при делении на 5 остаток 4, и ровно 14 чисел, дающих при делении на 5 остаток 1. По условию каждый раз с доски стирали два числа, разность которых делится на 5. Значит, в каждой из пар стёртых чисел оба числа дают одинаковый остаток при делении на 5. Поэтому на доске обязательно останется число, делящееся на 5, и число, которое при делении на 5 даёт остаток 4. Произведение этих чисел делится на 5 и, следовательно, не может оканчиваться на цифру 4.

в) Как было доказано в предыдущем пункте, если на доске осталось ровно два числа, то одно из них делится на 5, а второе даёт при делении на 5 остаток 4. Первое из этих чисел не меньше 65^2 и не больше 95^2, второе не меньше 63^2 и не больше 93^2. Поэтому если первое из этих чисел поделить на второе, то получится не больше $\left(\frac{95}{63}\right)^2$, а если второе из этих чисел поделить на первое, то получится не больше $\left(\frac{93}{65}\right)^2$. Поскольку $\left(\frac{95}{63}\right)^2 > \left(\frac{93}{65}\right)^2$, получаем, что наибольшее значение, которое может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них, не превосходит $\left(\frac{95}{63}\right)^2$.

На доске могли остаться числа 95^2 и 63^2, так как остальные квадраты чисел от 63 до 96 можно разбить на такие пары: 3 пары чисел, делящихся на 5, 7 пар чисел, дающих при делении на 5 остаток 1, и 6 пар чисел, дающих при делении на 5 остаток 4. Значит, наибольшее значение, которое может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них, равно $\left(\frac{95}{63}\right)^2$.

Ответ: а) может; б) не может; в) $\left(\frac{95}{63}\right)^2$.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

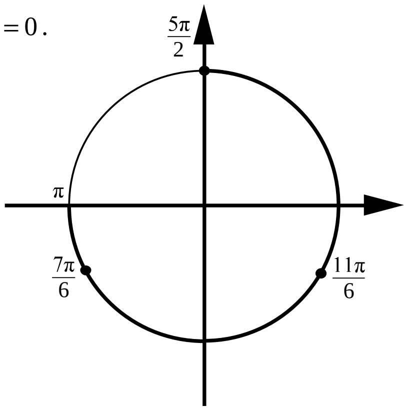
Вариант 12

13 а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)}=2.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение: $\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\sin x}-2=0$.



Сделаем замену $y=\dfrac{1}{\sin x}$. Получим

$y^2+y-2=0$; $y=1$ или $y=-2$.

Значит, $\sin x=-\dfrac{1}{2}$ или $\sin x=1$.

Если $\sin x=-\dfrac{1}{2}$, то

$$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Если $\sin x=1$, то $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни на отрезке $\left[\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$. Получим $x=\dfrac{7\pi}{6}$, $x=\dfrac{11\pi}{6}$ или $x=\dfrac{5\pi}{2}$.

Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т. п.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\ -\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\ -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m,\ k,n,m\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{7\pi}{6}$; $\dfrac{11\pi}{6}$; $\dfrac{5\pi}{2}$.

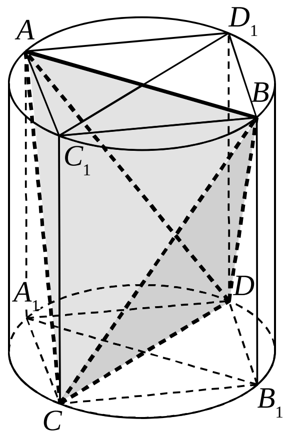
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Отрезок AB — диаметр верхнего основания цилиндра, CD — диаметр нижнего, причём отрезки AB и CD не лежат на параллельных прямых.

а) Докажите, что у тетраэдра $ABCD$ скрещивающиеся рёбра попарно равны.

б) Найдите объём этого тетраэдра, если $AC=7$, $AD=6$, а радиус цилиндра равен $2{,}5$.

Решение.



а) Рёбра AB и CD равны как диаметры равных окружностей. Проведём образующие AA_1 и BB_1. Тогда A_1B_1 — диаметр нижнего основания, поэтому A_1DB_1C — прямоугольник. Значит, $A_1C = B_1D$. Треугольники CAA_1 и DBB_1 равны по двум катетам. Значит, их гипотенузы равны: $AC = BD$. Аналогично доказывается равенство $AD = BC$.

б) Построим ещё две образующие CC_1 и DD_1. Многогранник $A_1DB_1CAD_1BC_1$ — прямая призма с основанием A_1DB_1C. Найдём длины её рёбер.

Пусть $A_1C = x$, $A_1D = y$ и $A_1A = h$. По теореме Пифагора

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 49, \\ y^2 + h^2 = 36, \\ x^2 + y^2 = 25, \end{cases}$$

откуда $x = A_1C = \sqrt{19}$, $y = A_1D = \sqrt{6}$, $h = AA_1 = \sqrt{30}$.

Объём всей призмы равен $A_1C \cdot A_1D \cdot AA_1 = 6\sqrt{95}$, а объём каждой из четырёх пирамид AA_1DC, BB_1DC, DD_1AB и CC_1AB равен $\frac{1}{6} \cdot 6\sqrt{95} = \sqrt{95}$.

Следовательно, объём тетраэдра $ABCD$ равен $6\sqrt{95} - 4\sqrt{95} = 2\sqrt{95}$.

Ответ: б) $2\sqrt{95}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\log_{16}(x+5) + \log_{(x^2+10x+25)} 2 \geq \frac{3}{4}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{1}{4}\log_2(x+5)+\frac{1}{2}\log_{x+5}2\ge\frac{3}{4}.$$

Пусть $\log_2(x+5)=y$, тогда

$$\frac{y}{4}+\frac{1}{2y}-\frac{3}{4}\ge 0;\quad \frac{y^2+2-3y}{4y}\ge 0;\quad \frac{(y-2)(y-1)}{4y}\ge 0;\quad 0<y\le 1,\quad y\ge 2.$$

Следовательно,

$$0<\log_2(x+5)\le 1 \text{ или } \log_2(x+5)\ge 2$$

Из первого неравенства находим

$$1<x+5\le 2,\quad \text{то есть } -4<x\le -3.$$

Из второго неравенства находим

$$x+5\ge 4,\quad \text{то есть } x\ge -1.$$

Ответ: $-4<x\le -3$; $x\ge -1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

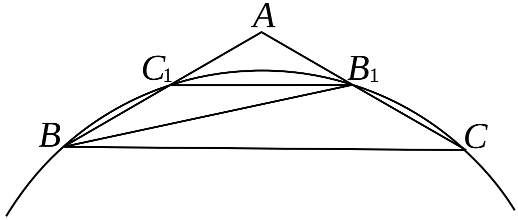
16 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1

б) Вычислите длину стороны B_1C_1 и радиус данной окружности, если $\angle A=120°$, $BC=10\sqrt{7}$ и площадь треугольника AB_1C_1 в три раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

Решение.

а) Заметим, что $\angle AB_1C_1+\angle C_1B_1C=180°$. Четырёхугольник BCB_1C_1 вписан в окружность, поэтому $\angle C_1BC+\angle C_1B_1C=180°$. Значит, $\angle AB_1C_1=\angle C_1BC=\angle ABC$. Следовательно, треугольники ABC и AB_1C_1 подобны по двум углам.



б) Площадь треугольника AB_1C_1 в три раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1, поэтому площадь треугольника ABC в четыре раза больше площади треугольника AB_1C_1 и коэффициент подобия этих треугольников равен 2. Отсюда следует, что $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC = 5\sqrt{7}$.

Пусть $AB_1 = x$, тогда $AB = 2x$. Найдём BB_1 по теореме косинусов из треугольника ABB_1:

$$BB_1^2 = x^2 + 4x^2 - 2x \cdot 2x \cdot \cos 120° = 7x^2.$$ Следовательно, $BB_1 = \sqrt{7}x$.

Теперь по теореме синусов из треугольника ABB_1 получаем

$$\frac{AB}{\sin\angle AB_1B} = \frac{BB_1}{\sin\angle A}; \quad \sin\angle AB_1B = \frac{AB}{BB_1}\sin\angle A.$$

Но $\sin\angle AB_1B = \sin\angle BB_1C$, поскольку синусы смежных углов равны.

Получаем $\sin\angle BB_1C = \frac{AB}{BB_1}\sin\angle A = \frac{2x}{\sqrt{7}x}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Теперь находим радиус окружности, описанной около треугольника BCB_1:

$2R = \frac{BC}{\sin\angle BB_1C} = \frac{70}{\sqrt{3}}$; $R = \frac{35\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: б) $5\sqrt{7}$; $\frac{35\sqrt{3}}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 30 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}6S$	$0{,}25S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

Решение.
В январе 2017 года долг будет составлять $1{,}3S$ млн рублей, а в июле 2017 года — $0{,}6S$ млн рублей. Значит, выплата в 2017 году составит $0{,}7S$ млн рублей.
В январе 2018 года долг будет составлять $1{,}3\cdot 0{,}6S = 0{,}78S$ млн рублей, а в июле 2018 года — $0{,}25S$ млн рублей. Значит, выплата в 2018 году составит $0{,}53S$ млн рублей.
В январе 2019 года долг перед банком составит $1{,}3\cdot 0{,}25S = 0{,}325S$, а в июле — 0 рублей. Значит, выплата в 2019 году составит $0{,}325S$ млн рублей.
Решим систему:

$$\begin{cases} 0{,}7S < 5, \\ 0{,}53S < 5, \\ 0{,}325S < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S < 7{,}14..., \\ S < 9{,}43..., \\ S < 15{,}38... \end{cases}$$

Наибольшее целое решение этой системы — $S = 7$ млн рублей.
Ответ: 7.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено или имеется верный ответ без обоснования	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(x+\ln(x+a)\right)^2=\left(x-\ln(x+a)\right)^2$$

имеет единственное решение на отрезке $[0;1]$.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$\left(x+\ln(x+a)\right)^2-\left(x-\ln(x+a)\right)^2=0;\quad 2x\cdot 2\ln(x+a)=0.$$

Получаем корни: $x=0$ (при условии $a>0$) или $x=1-a$.

1. При $a<0$ уравнение имеет единственный корень $x=1-a$, не принадлежащий отрезку $[0;1]$.

2. При $a=0$ уравнение имеет единственный корень $x=1$, принадлежащий отрезку $[0;1]$.

3. При $a>0$ единственный корень $x=0$ на отрезке $[0;1]$ будет, только если $1-a\le 0$, то есть $a\ge 1$.

Ответ: $a=0$ или $a\ge 1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, разность которых делится на 5.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 34, если изначально по одному разу были написаны все натуральные числа от 9 до 20 включительно?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, произведение которых оканчивается на цифру 1, если изначально по одному разу были написаны квадраты натуральных чисел от 59 до 92 включительно?

в) Пусть известно, что на доске осталось ровно два числа, а изначально по одному разу были написаны квадраты натуральных чисел от 59 до 92 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

Решение.

а) Пусть стирали следующие пары чисел: 9 и 19, 10 и 15, 11 и 16, 12 и 17, 13 и 18. Тогда на доске останутся числа 14 и 20, сумма которых равна 34.

б) Среди чисел от 59 до 92 ровно 6 чисел, дающих при делении на 5 остаток 3, и ровно по 7 чисел, дающих при делении на 5 четыре других возможных остатка. Следовательно, среди квадратов чисел от 59 до 92 ровно 7 чисел, делящихся на 5, ровно 13 чисел, дающих при делении на 5 остаток 4, и ровно 14 чисел, дающих при делении на 5 остаток 1. По условию каждый раз с доски стирали два числа, разность которых делится на 5. Значит, в каждой из пар стёртых чисел оба числа дают одинаковый остаток при делении на 5. Поэтому на доске обязательно останется число, делящееся на 5, и число, которое при делении на 5 даёт остаток 4. Произведение этих чисел делится на 5 и, следовательно, не может оканчиваться на цифру 1.

в) Как было доказано в предыдущем пункте, если на доске осталось ровно два числа, то одно из них делится на 5, а второе даёт при делении на 5 остаток 4. Первое из этих чисел не меньше 60^2 и не больше 90^2, второе не меньше 62^2 и не больше 92^2. Поэтому если первое из этих чисел поделить на второе, то получится не больше $\left(\frac{90}{62}\right)^2$, а если второе из этих чисел поделить на первое, то получится не больше $\left(\frac{92}{60}\right)^2$. Поскольку $\left(\frac{92}{60}\right)^2 > \left(\frac{90}{62}\right)^2$, получаем, что наибольшее значение, которое может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них, не превосходит $\left(\frac{92}{60}\right)^2$.

На доске могли остаться числа 92^2 и 60^2, так как остальные квадраты чисел от 59 до 92 можно разбить на такие пары: 3 пары чисел, делящихся на 5, 7 пар чисел, дающих при делении на 5 остаток 1, и 6 пар чисел, дающих при делении на 5 остаток 4. Значит, наибольшее значение, которое может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них, равно $\left(\frac{92}{60}\right)^2 = \left(\frac{23}{15}\right)^2$.

Ответ: а) может; б) не может; в) $\left(\frac{23}{15}\right)^2$.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Оглавление